Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2021/22
Andreas Eberle, Luis Aniello La Rocca

11. Übungsblatt „Stochastik für Lehramt"

Abgabe bis Freitag 7. Januar, 14 Uhr.

Wir wünschen Ihnen fröhliche Weihnachten und ein gutes neues Jahr 2022 !

1. (Unabhängigkeit und Unkorreliertheit) Seien X und Y Zufallsvariablen mit Werten in $\{-1, 1\}$. Es gelte

$$\begin{aligned} P[X = 1, Y = 1] &= a, \quad & P[X = 1, Y = -1] &= b, \\ P[X = -1, Y = 1] &= c, \quad & P[X = -1, Y = -1] &= d. \end{aligned}$$

a) Wann sind X und Y unkorreliert bzw. unabhängig ? Geben Sie jeweils notwendige und hinreichende Bedingungen an die Koeffizienten a, b, c, d der Massenfunktion der gemeinsamen Verteilung an.

b) Seien nun X und Y unabhängig und gleichverteilt. Zeigen Sie, dass die drei Zufallsvariablen $X, Y, X \cdot Y$ paarweise unabhängig sind. Sind sie auch unabhängig?

2. (Verteilungsfunktionen I)

a) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Verteilungsfunktion

$$F(c) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } c < -1, \\ 1 - p & \text{für } -1 \leq c < 0, \\ 1 - p + \frac{1}{2}cp & \text{für } 0 \leq c \leq 2, \\ 1 & \text{für } c > 2. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P[X = -1]$, $P[X = 0]$ und $P[X \geq 1]$.

b) Sei nun F die Verteilungsfunktion einer beliebigen Zufallsvariable X. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen der folgenden Zufallsvariablen in Abhängigkeit von F:

$$X^+ \;=\; \max(X, 0), \qquad X^- \;=\; -\min(X, 0), \qquad |X|.$$

3. (Verteilungsfunktionen II; alte Klausuraufgabe)

a) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Wie sind die Verteilung und die Verteilungsfunktion von X definiert? Wann nennt man die Verteilung absolutstetig? Wie hängen die Verteilungsfunktion und die Dichte in diesem Fall zusammen?

b) Sind die Verteilungen der folgenden Zufallsvariablen absolutstetig? Skizzieren Sie die Graphen der Verteilungsfunktionen, sowie, im absolutstetigen Fall, die Graphen der Dichten (mit Beschriftung der Koordinatenachsen):

(i) $U \sim \mathrm{Unif}(-1, 3)$,

(ii) $X \sim N(1, 0.01)$,

(iii) $Y = B \cdot Z$ mit B, Z unabhängig, $Z \sim N(0, 1)$, $P[B = 0] = P[B = 1] = 1/2$,

(iv) $W = (2B - 1) \cdot Z$ mit B, Z wie in (iii).

c) Sei A der Flächeninhalt eines Kreises, dessen Radius Exp(1)-verteilt ist. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion und die Dichte der Verteilung von A.

4. (Verteilungsfunktionen III; Klausuraufgabe) Sei

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-x)x & \text{falls } 0 \le x < 2, \\ \frac{1}{3}(x-2) & \text{falls } 2 \le x < 3, \\ \frac{1}{3}e^{-\lambda(x-3)} & 3 \le x, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass f_λ eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf $\mathbb{R}$ ist. Rechnen Sie mit diesem Wert weiter!

b) Geben Sie die zugehörige Verteilungsfunktion F_λ an.

c) Bestimmen Sie $P[2 < X < 5]$ für eine Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion F_λ.

5. (Verteilungsfunktionen IV; Klausuraufgabe) Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F, und sei $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Zeigen Sie, dass $G(x) = 1 - (1 - F(x))^n$ die Verteilungsfunktion von Y ist.

b) Sei nun X_1 exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass Y exponentialverteilt ist mit Parameter λn.

6. (Borelsche σ-Algebren) Sei Ω eine nichtleere Menge, und $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

a) Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{J})$ eine σ-Algebra ist.

b) Folgern Sie, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ alle abgeschlossenen und offenen Intervalle enthält.

c) Zeigen Sie $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\left((-\infty, c] : c \in \mathbb{R} \right)$.