Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2021/22
Andreas Eberle, Luis Aniello La Rocca

10. Übungsblatt „Stochastik für Lehramt"

Abgabe bis Donnerstag 16.12., 14 Uhr.

---

1. (Varianz und Kovarianz) Seien X und Y Zufallsvariablen mit Wertebereich $\{0, 1, 2, 3\}$. Die gemeinsame Verteilung sei gegeben durch

	y = 0	y = 1	y = 2	y = 3
x = 0	0.11	0.05	0.02	0.00
x = 1	0.04	0.20	0.10	0.04
x = 2	0.01	0.05	0.18	0.06
x = 3	0.00	0.01	0.03	0.10

a) Berechnen Sie die Erwartungswerte von X und Y.

b) Berechnen Sie $\mathrm{Var}[X], \mathrm{Var}[Y]$ und $\mathrm{Cov}[X, Y]$.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsvariable

$$Z \;:=\; (X+Y)/2\,.$$

2. (Zufällige Summen mit zufälliger Summandenzahl) Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $N : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ eine Zufallsvariable mit Erwartungswert m_1 und Varianz v_1. Zeigen Sie:

a) Für den Erwartungswert $E[Y]$ einer (diskreten) reellwertigen Zufallsvariable Y auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gilt

$$E[Y] \;=\; \sum_{k:P[N=k]\neq 0} E[Y|N=k]\cdot P[N=k]\;.$$

Hinweis: Die bedingte Erwartung gegeben $N = k$ ist der Erwartungswert bzgl. der bedingten Verteilung, d.h. $E[Y|N=k] \;=\; \sum_{a\in Y(\Omega)} a\cdot P[Y=a|N=k]$.

b) Sind $X_1, X_2, \ldots$ unkorrelierte und von N unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit festem Erwartungswert m_2 und Varianz v_2, dann hat die zufällige Summe

$$S_N(\omega) \;:=\; X_1(\omega)+X_2(\omega)+\cdots+X_{N(\omega)}(\omega)$$

den Erwartungswert $E[S_N] = m_1 m_2$ und die Varianz $\mathrm{Var}[S_N] = m_1 v_2 + m_2^2 v_1$.

3. (Korrelation und lineare Prognosen) Ein Würfel wird zweimal geworfen. Seien X_1 und X_2 die unabhängigen Ausgänge des jeweiligen Wurfes.

a) Berechnen Sie die Korrelation $\rho[X_1, X_1 + X_2]$.

b) Berechnen Sie die Korrelation $\rho[X_1, \max(X_1, X_2)]$.

e) Bestimmen Sie basierend auf X_1 die besten linearen Prognosen im quadratischen Mittel für die Zufallsvariablen $X_1 + X_2$ und $\max(X_1, X_2)$.

4. (Regressionsgeraden und Simpson-Paradox) Langzeitstudent Anton hat bei 8 ehemaligen Kommilitonen die Studiendauer (in Semestern) und das Anfangsgehalt (in 1000€) ermittelt:

Studiendauer	10	9	11	9	11	12	10	11
Anfangsgehalt	35	35	34	36	41	39	40	38

Er zeichnet die Regressionsgerade für das Anfangsgehalt in Abhängigkeit von der Studiendauer und verkündet triumphierend: “Längeres Studium führt zu einem höheren Anfangsgehalt!” Seine Freundin Brigitte bezweifelt dies und stellt fest, dass die ersten vier in der Tabelle ein anderes Schwerpunktgebiet gewählt haben als die restlichen vier. Sie zeichnet die Regressionsgeraden für jede dieser Vierergruppen und stellt fest: “Studiendauer und Anfangsgehalt sind negativ korreliert!” Bestimmen und zeichnen Sie die genannten Regressionsgeraden.

Information der Fachschaft: Dieses Jahr findet die Mathe-Weihnachtsfeier virtuell am Dienstag, den 21.12., ab 18 c.t. statt. Alle aktuellen Informationen und eine Anmeldung sind auf unserer Website (fsmath.uni-bonn.de) zu finden. Schaut vorbei!