Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2010
Andreas Eberle, Frank Miebach

9. Übungsblatt „Stochastische Prozesse"

Abgabe bis Dienstag, 22.06.2010, 14 Uhr

---

1. (Martingale der Brownschen Bewegung)

Eine aufsteigende Familie $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ von σ-Algebren heißt *Filtration*. Ein *Martingal* bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ist ein reellwertiger stochastischer Prozeß $(M_t)_{t\geq 0}$ mit

$$\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s \qquad \text{für alle } \; 0 \leq s \leq t.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Prozesse zeitstetige Martingale sind:

a) Eine eindimensionale Brownsche Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$ bzgl. $\mathcal{F}_t = \sigma(B_r : 0 \leq r \leq t)$.

b) $M_t^\lambda \; = \; \exp(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, bzgl. derselben Filtration.

c) $h(B_t)$, falls $(B_t)_{t\geq 0}$ eine d–dimensionale Brownsche Bewegung, und h eine harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^d$ ist (d.h. $\Delta h = 0$), bzgl. $\mathcal{F}_t = \sigma(B_r^1, B_r^2, \ldots, B_r^d \; : \; 0 \leq r \leq t)$.

2. (Nullstellen Brownscher Pfade)

Sei $(B_t)_{t\in[0,1]}$ eine Brownsche Bewegung auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, deren Pfade $t \mapsto B_t(\omega)$ alle stetig sind.

a) Zeigen Sie, dass $(t, \omega) \mapsto B_t(\omega)$ — aufgefasst als Abbildung von $\Omega \times [0,1]$ nach $\mathbb{R}$ — messbar ist bzgl. der Produkt–σ–Algebra.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $\int_0^1 B_s(\omega)\, ds$.

c) Zeigen Sie: $\mathbb{P}$–fast sicher gilt: $\lambda\left[\{t \in [0,1] |\, B_t(\omega) = 0\}\right] = 0$.

3. (Diffusion mit Quellen)

Es bezeichne X_n die Anzahl der Teilchen in einem gegebenen Volumen V zur Zeit n. In dem Zeitintervall $[n, n+1)$ verlässt jedes der X_n Teilchen das Volumen V mit Wahrscheinlichkeit $p = 1-q$, $0 < q < 1$, und eine mit Parameter λ Poissonverteilte Anzahl von Teilchen dringt in V ein. Diese zufälligen Phänomene seien unabhängig voneinander.

a) Berechnen Sie $\mathbb{E}[e^{itX_1}|X_0 = x]$.

b) X_0 sei Poissonverteilt mit Parameter θ. Wie sieht die charakteristische Funktion von X_1 aus? Zeigen Sie, dass die Verteilung μ_θ von X_0 für einen geeigneten Wert von θ ein Gleichgewicht ist.

c) Zeigen Sie, dass die Übergangsmatrix $\tilde{p}$ der Markovkette X_n gegeben ist durch:

$$\tilde{p}(x, y) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{x \wedge y} \binom{x}{k} q^k (1-q)^{x-k} \frac{\lambda^{y-k}}{(y-k)!}.$$

Folgern Sie, dass die Markovkette irreduzibel und positiv rekurrent ist.

d) Was ist der $\mathbb{P}_x$-fast sichere Grenzwert von $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k$ für $n \to \infty$? Was ist der von $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k^2$?

4. (Ein Prozess mit Gedächtnis)

Eine Folge von A's und B's wird wie folgt konstruiert: Das erste Folgenglied wird zufällig gewählt gemäß $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$. Ebenso wird das zweite Element zufällig und unabhängig vom ersten gewählt. Sobald die ersten $n \geq 2$ Elemente ausgewählt sind, wird das $(n+1)$-te Element, bedingt auf das $(n-1)$-te und n-te Folgenglied, wie folgt gewählt:

$$\mathbb{P}(A|AA) = \tfrac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(A|AB) = \tfrac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(A|BA) = \tfrac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(A|BB) = \tfrac{1}{4}.$$

Wie hoch ist der Anteil von A's und B's in einer langen Kette?