Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2010
Andreas Eberle, Frank Miebach

8. Übungsblatt „Stochastische Prozesse"

Abgabe bis Dienstag, 15.06.2010, 14 Uhr

---

1. (Asymptotik endlicher Markovketten)
Sei $(X_n, \mathbb{P}_x)$ die kanonische Markovkette mit Zustandsraum $S = \{1, 2, 3, 4\}$ und Übergangsmatrix

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Markovkette irreduzibel und positiv rekurrent ist, und berechnen Sie die Gleichgewichtsverteilung.

b) Bestimmen Sie die Asymptotik von $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k$ und $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k^2$ für $n \to \infty$.

2. (Asymptotische Effizienz)
Man betrachte eine Produktionsanlage, bei der jedes hergestellte Element mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ fehlerhaft ist. Es wird der folgende Prüfplan eingeführt mit dem Ziel, fehlerhaft angefertigte Elemente zu erfassen ohne jedes einzelne Element untersuchen zu müssen. Der Plan hat zwei Phasen: In Phase A wird ein Element mit Wahrscheinlichkeit $r \in (0, 1)$ kontrolliert. In Phase B werden alle Elemente überprüft. Es wird von Phase A zu Phase B gewechselt, sobald ein fehlerhafter Artikel entdeckt wird. Es wird von Phase B zu Phase A gewechselt, sobald N aufeinanderfolgend kontrollierte Elemente fehlerfrei sind. Es sei $(X_n)_{n\geq 0}$ der Prozess mit Werten in $\{E_0, \ldots, E_N\}$, wobei E_j für $j \in \{0, \ldots, N-1\}$ den Zustand beschreibt, dass sich der Prüfplan in Phase B befindet mit j aufeinanderfolgend als fehlerfrei erkannten Elementen und E_N den Zustand, dass sich der Plan in Phase A befindet.

a) Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\geq 0}$ eine zeithomogene Markovkette ist. Geben Sie die Übergangsmatrix an und zeigen Sie, dass ein Gleichgewicht existiert. Berechnen Sie dieses.

b) Geben Sie die Effizienz des Prüfplans an. Diese ist definiert als das Verhältnis des Langzeitanteils der als fehlerhaft erkannten Elemente zu dem Anteil der fehlerhaften Elemente.

3. (Wiederkehrsätze von Kac und Poincaré)
Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ ein auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definierter stationärer stochastischer Prozess mit messbarem Zustandsraum $(S, \mathcal{S})$. Zeigen Sie, dass für alle $A \in \bigotimes_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}$ gilt:

a) **Satz von Kac:**
$$E[\tau_A; A] = \mathbb{P}[\tau_A < \infty],$$
wobei $\tau_A := \min\{n \geq 1 | (X_n, X_{n+1}, \dots) \in A\}$.

b) **Satz von Poincaré:** $(X_n)_{n\geq 0}$ ist rekurrent in folgendem Sinne:
$$(X_n(\omega), X_{n+1}(\omega), \dots) \in A \quad \text{unendlich oft für } \mathbb{P}\text{-f.a. } \omega \in A.$$

4. (Autoregressiver Prozess in $\mathbb{R}^d$)
Der autoregressive Prozess X_n in $\mathbb{R}^d$ ist durch die folgende Rekursionsformel gegeben:
$$X_n = \theta X_{n-1} + U_n.$$
Dabei seien $\theta : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ eine lineare Abbildung und U_n unabhängige, $N(0, I_d)$-verteilte Zufallsvariablen.
Zeigen Sie: Ist θ nicht symmetrisch, dann existiert unter geeigneten Voraussetzungen (geben Sie diese an) ein Gleichgewicht, aber die "Detailed Balance"-Bedingung ist nicht erfüllt!

***5. (Zusatzaufgabe)**
Die Urfassung eines Buches wird von einer unendlichen Folge von Redakteuren korrekturgelesen. Bei einem Lesevorgang wird jeder Fehler mit einer Wahrscheinlichkeit p gefunden. Zwischen den Lesevorgängen korrigiert ein Setzer die entdeckten Fehler, verursacht aber auch eine zufällige Anzahl neuer Fehler (selbst wenn keine Fehler entdeckt wurden). Die Anzahlen der neuen Fehler nach den verschiedenen Lesevorgängen seien identisch verteilt. Finden Sie unter geeigneten Unabhängigkeitsannahmen einen Ausdruck für die erzeugende Funktion der Gleichgewichtsverteilung der Anzahl X_n der Fehler nach dem n-ten Redakteur-Setzer-Zyklus. Bestimmen Sie das Gleichgewicht explizit für den Fall, dass der Setzer in jedem Zyklus eine Poisson-verteilte Anzahl an Fehlern einführt.