Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2010
Andreas Eberle, Frank Miebach

7. Übungsblatt „Stochastische Prozesse"

Abgabe bis Dienstag, 08.06.2010, 14 Uhr

---

1. (Rekurrenz und Transienz von Random Walks)

a) Ist der einfache Random Walk auf dem binären Baum

rekurrent oder transient ?

b) Zeige: Für den klassischen Random Walk in $\mathbb{Z}^3$ gilt

$$p^{2n}(x,x) \;=\; \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sum_{\substack{i,j,k\geq 0\\ i+j+k=n}} \binom{n}{i\,j\,k}^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \;\leq\; \frac{const.}{n^{3/2}}\,,$$

wobei $\binom{n}{i\,j\,k} := \frac{n!}{i!j!k!}$. Folgere, dass der Random Walk transient ist.
Hinweis : $\sum_{i+j+k=n}\binom{n}{i\,j\,k} = 3^n$.

2. (Verteilung der ersten Rückkehrzeit)

Sei (X_n, P_x) eine Markovkette mit abzählbarem Zustandsraum S, und sei $T_x := \min\{n \geq 1 \,|\, X_n = x\}$. Die erzeugende Funktion der Verteilung von T_x bei Start in x ist

$$G(z) \;=\; E_x\left[z^{T_x}\right] \qquad (\, z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1\,)\,.$$

a) Zeige:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_x[X_n = x]\, z^n \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} E_x\left[z^{T^{(k)}}\right] \;=\; \frac{1}{1-G(z)}$$

wobei $T^{(k)}$ die k–te Rückkehrzeit nach x ist.

b) Folgere: Für den gewöhnlichen Random Walk auf $\mathbb{Z}$ gilt:

$$\frac{1}{1-G(z)} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} z^{2n} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,,$$

also $G(z) = 1 - \sqrt{1-z^2}$. Insbesondere ist $E_x[T_x] = \infty$.

3. (Sprungkette einer Markovkette)
Sei X_n eine homogene Markovkette mit abzählbarem Zustandsraum S und Übergangsmatrix p, sodass $p(x,x) < 1$ für alle $x \in S$. Wir definieren rekursiv eine Folge T_k durch

$$T_0 = 0, \qquad T_{k+1} \;=\; \inf\{n > T_k \,|\, X_n \neq X_{T_k}\}.$$

a) Zeige, dass T_k für alle $k \geq 0$ eine Stoppzeit und fast sicher endlich ist.

b) Zeige, dass der durch $Y_n = X_{T_n}$ definierte stochastische Prozess wieder eine homogene Markovkette ist und bestimme die Übergangsmatrix.

4. (Rekurrenz und Transienz von eindimensionalen Markovketten)
Sei (X_n, P_x) die kanonische Markovkette auf $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(x, x+1) = p_x, \;\; p(x,x) = r_x, \;\; p(x, x-1) = q_x, \;\; p(x,y) = 0 \text{ sonst}$$

($p_x + q_x + r_x = 1, \;\; q_0 = 0, \;\; p_x, q_x \neq 0 \;\forall\, x \neq 0$). Wie auf dem letzten Übungsblatt gezeigt, löst die Funktion

$$h(x) \;=\; \sum_{y=0}^{x-1} \prod_{z=1}^{y} \frac{q_z}{p_z}$$

die Differenzengleichung

$$p_x h(x+1) + r_x h(x) + q_x h(x-1) \;=\; h(x) \qquad \forall\, x \geq 0.$$

und es folgt

$$P_x\left[X_{T_{a,b}} = a\right] \;=\; \frac{h(b) - h(x)}{h(b) - h(a)} \qquad \forall\, 0 \leq a \leq x \leq b\,,$$

wobei $T_{a,b} = \inf\{n \geq 0 \,|\, X_n \notin (a,b)\}$.

a) Zeige, dass X_n genau dann rekurrent bzw. transient ist, wenn $h(\infty) = \infty$ bzw. $h(\infty) < \infty$ gilt.

b) Seien speziell $p_0 = 1$, $q_0 = r_0 = 0$ und

$$p_x \;=\; \frac{1}{2} + \frac{C}{x^\alpha}, \;\; q_x = \frac{1}{2} - \frac{C}{x^\alpha}, \;\; r_x = 0 \qquad \text{für } x \geq 1$$

mit $\alpha > 0$ und $C \in \mathbb{R}$. Zeige:

$$\begin{aligned} \alpha > 1 \quad &\Rightarrow \quad X_n \text{ rekurrent} \\ \alpha < 1 \quad &\Rightarrow \quad X_n \text{ transient.} \end{aligned}$$

c)* Sei nun $\alpha = 1$. Zeige:

$$\begin{aligned} C < 1/4 \quad &\Rightarrow \quad X_n \text{ rekurrent} \\ C > 1/4 \quad &\Rightarrow \quad X_n \text{ transient.} \end{aligned}$$

Es gibt also einen „Phasenübergang" von Rekurrenz zu Transienz bei $p_x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4x}$.