Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2010
Andreas Eberle, Frank Miebach

6. Übungsblatt „Stochastische Prozesse"

Abgabe bis Dienstag, 01.06.2010, 14 Uhr

---

1. (Eindimensionale Markovketten [Birth-and-death process])
Sei (X_n, P_x) die kanonische Markovkette auf $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(x, x+1) = p_x,\; p(x, x) = r_x,\; p(x, x-1) = q_x,\; p(x, y) = 0 \text{ sonst}$$

$(\, p_x + q_x + r_x = 1,\; q_0 = 0,\; p_x, q_x \neq 0 \;\forall\, x \neq 0\,)$.

a) Leite aus der Mittelwerteigenschaft

$$p_x u(x+1) + r_x u(x) + q_x u(x-1) \;=\; u(x) \qquad \forall\, x \geq 1,$$

eine äquivalente Gleichung für die erste Differenz $v(x) := u(x+1) - u(x)$ her und bestimme alle harmonischen Funktionen der Markovkette.

b) Folgere für $0 \leq a < b$:

$$P_x\left[X_{T_{a,b}} = a\right] \;=\; \frac{h(b) - h(x)}{h(b) - h(a)} \qquad \forall\, a \leq x \leq b\,,$$

wobei $T_{a,b} = \inf\{n \geq 0 \,|\, X_n \notin (a, b)\,\}$, und

$$h(x) \;=\; \sum_{y=0}^{x-1} \prod_{z=1}^{y} \frac{q_z}{p_z}.$$

c) Berechne die Aussterbewahrscheinlichkeit $P_x[\exists\, n \geq 0 :\; X_n = 0]$ bei Start in x. Unter welcher Bedingung stirbt der Prozess fast sicher aus ? Was passiert in den anderen Fällen ?

2. (Ruinwahrscheinlichkeiten)
Ein Spieler hat 2 Euro und möchte daraus möglichst schnell 10 Euro machen. Dazu spielt er ein Spiel mit folgenden Regeln : Eine faire Münze wird geworfen. Hat der Spieler die richtige Seite erraten, gewinnt er eine Summe von der Größe seines Einsatzes, und erhält seinen Einsatz zurück – andernfalls verliert er seinen Einsatz. Der Spieler beschließt eine feste Strategie zu wählen : Falls er weniger als 5 Euro besitzt, setzt er sein gesamtes Kapital ein; andernfalls setzt er gerade soviel, daß er im Anschluß genau 10 Euro hat, falls er beim nächsten Wurf gewinnt.

Sei $X_0 = 2$, und sei X_n das Kapital nach n Münzwürfen. Zeige, daß der Spieler sein Ziel mit Wahrscheinlichkeit $1/5$ erreicht.

3. (Random walk on a bow tie)

A particle performs a random walk on a bow tie ABCDE drawn beneath. From any vertex its next step is equally likely to be to any neighbouring vertex. Initially it is at A. Find the expected value of:

a) the time of first return to A, given no prior visit by the particle to E,

b) the number of visits to D before returning to A, given no prior visit by the particle to E.

4. (Ein Warteschlangenmodell [M/G/1–queue])

In einer Warteschlange wird in der n–ten Zeiteinheit ein Kunde bedient, und A_n neue Kunden kommen an. Dabei seien A_n, $n \in \mathbb{N}$, i.i.d. Zufallsvariablen mit Werten in $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Zeige :

a) Die Anzahl X_n der zur Zeit n in der Schlange wartenden Kunden erfüllt:

$$\begin{aligned} X_n - X_{n-1} &= I_{\{X_{n-1}=0\}} + S_n - S_{n-1}\,, \qquad \text{wobei} \\ S_n &= \sum_{k=1}^{n} (A_k - 1)\,. \end{aligned}$$

b) Gilt $E[A_n] > 1$, dann ist 0 ein transienter Zustand von X_n.

c) Gilt $E[A_n] \leq 1$, dann ist 0 rekurrent (d.h. die Warteschlange wird immer wieder abgearbeitet).

5. (*Zusatzaufgabe)

An urn initially contains n green balls and $n + 2$ red balls. A ball is picked at random: If it is green then a red ball is also removed and both are discarded. If it is red then it is replaced together with an extra red and an extra green ball. This is repeated until there are no green balls in the urn. Show that the probability the process terminates is $1/(n+1)$.