Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2010
Andreas Eberle, Frank Miebach

5. Übungsblatt „Stochastische Prozesse"

Abgabe bis Dienstag, 18.05.2010, 14 Uhr

---

1. (First step analysis)
Wir betrachten den Random walk auf $\mathbb{Z}$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten $p(x, x+1) = p$, $p(x, x-1) = q := 1 - p$, $p \in (\frac{1}{2}, 1)$. Sei

$$u(x) \;:=\; E_x\left[\sum_{n=0}^{\infty} a^{X_n}\right], \qquad a > 0\,.$$

a) Zeige : $u(x+1) \;=\; a \cdot u(x)\,.$

b) Berechne $u(0)$ durch Konditionieren auf den ersten Schritt, und interpretiere das Ergebnis.

2. (Endliche Markovketten)
Wir betrachten eine zeithomogene Markovkette auf $\{1, 2, 3\}$ mit Übergangsmatrix

$$p := \begin{pmatrix} 1-2q & 2q & 0 \\ q & 1-2q & q \\ 0 & 2q & 1-2q \end{pmatrix}$$

und Startpunkt $x \in \{1, 2, 3\}$. Berechne

a) die n–Schritt Rückkehrwahrscheinlichkeiten $P[X_n = x]$,

b) die mittlere Anzahl der Besuche im Startpunkt x bis zur Zeit n

für $x = 1, 2, 3$. Mit welcher Frequenz wird der Startpunkt für $n \to \infty$ besucht ?

3. (Strong Markov property)
Let X be a time-homogeneous Markov chain on a discrete state space S, and let T be a random variable taking values in $\{0, 1, 2, \dots\}$ with the property that the indicator function $I_{\{T=n\}}$ is a function of the variables $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$. Such a random variable T is called a *stopping time*, and the above definition requires that it is decidable whether or not T equals n with a knowledge only of the past and present, and with no further information about the future. Show that

$$P\left[X_{T+m} = j \mid X_k = x_k \text{ for } 0 \le k < T, X_T = i\right] \;=\; P\left[X_{T+m} = j \mid X_T = i\right]$$

for all $m \ge 0$, $i, j \in S$, and all sequences (x_k) of states such that the conditional probabilities are well-defined.

4. (Konvergenzsätze für bedingte Erwartungen)

a) Formuliere und beweise einen Satz von der monotonen Konvergenz für bedingte Erwartungen.

b) Folgere das Lemma von Fatou und den Satz von der majorisierten Konvergenz (Satz von Lebesgue) für bedingte Erwartungen.