Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2010
Andreas Eberle, Frank Miebach

4. Übungsblatt „Stochastische Prozesse"

Abgabe bis Dienstag, 11.05.2010, 14 Uhr

---

1. (Examples of Markov chains)

A die is rolled repeatedly. Which of the following are Markov chains? For those that are, supply the transition matrix.

a) The largest number M_n shown up to the nth roll.

b) The number N_n of sixes in n rolls.

c) At time r, the time C_r since the most recent six.

d) At time r, the time B_r until the next six.

2. (Projizierte Markovketten)

Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette mit abzählbarem Zustandsraum E und Übergangsmatrix P. Sei ferner $\varphi : E \longrightarrow F$ eine Abbildung von E in eine weitere abzählbare Menge F.

a) Zeige durch ein Beispiel, dass $(\varphi \circ X_n)_{n\geq 0}$ keine Markovkette zu sein braucht.

b) Unter welcher (nicht-trivialen) Bedingung an φ und P ist $(\varphi \circ X_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette?

3. (Überlagerung und Ausdünnung von Poissonprozessen)

Seien ν und $\tilde{\nu}$ endliche Maße auf einem meßbaren Raum $(S, \mathcal{S})$, und sei $\alpha : S \to [0,1]$ eine meßbare Funktion. Zeige:

a) Sind N und $\tilde{N}$ unabhängige Poissonsche Punktprozesse mit Intensitätsverteilung ν bzw. $\tilde{\nu}$, dann ist $N+\tilde{N}$ ein Poissonscher Punktprozeß mit Intensitätsverteilung $\nu+\tilde{\nu}$.

b) Seien $Z, X_1, X_2, \ldots,$ und $U_1, U_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungen $Z \sim \text{Poisson}(\nu(S))$, $X_i \sim \nu/\nu(S)$, und $U_i \sim \mathcal{U}_{(0,1)}$. Zeige, dass

$$N_\alpha \;=\; \sum_{i=1}^{Z} I_{\{U_i \leq \alpha(X_i)\}}\, \delta_{X_i}$$

ein PPP mit Intensitätsverteilung $\alpha(x)\,\nu(dx)$ ist.

4. (Ein Random Walk in zufälliger Umgebung)

Es seien $\theta, U_1, U_2, \ldots$ unabhängig mit $P[U_i \leq x] = x$ für $x \in (0,1)$. Wir setzen

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{für } U_i \leq \theta \\ -1 & \text{für } U_i > \theta \end{cases}$$

und $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Mit anderen Worten: Wir wählen zunächst θ gemäß einer gegebenen Verteilung aus, und werfen dann eine Münze mit Wahrscheinlichkeit θ für "Kopf", um einen Random Walk zu generieren. Zeige:

a) Die bedingte Verteilung von θ gegeben $X_1, \ldots, X_n$ ist eine Beta-Verteilung mit Dichte

$$(n+1) \cdot \binom{n}{\frac{S_n+n}{2}} t^{\frac{S_n+n}{2}} (1-t)^{\frac{n-S_n}{2}}, \qquad t \in (0,1).$$

($\int_0^1 t^k (1-t)^{n-k}\, dt = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$ *kann vorausgesetzt werden)*

b) Berechne $P[X_{n+1} = 1 | S_1, \ldots, S_n]$ und folgere, dass S_n eine zeitlich inhomogene Markovkette ist.

Bemerkung : Die Aussage hängt damit zusammen, dass "S_n eine suffiziente Statistik zum Schätzen von θ" ist.