Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2010
Andreas Eberle, Frank Miebach

3. Übungsblatt „Stochastische Prozesse"

Abgabe bis Dienstag, 04.05.2010, 14 Uhr

---

1. (Bedingte Verteilungen)

a) Die gemeinsame Dichte zweier Zufallsvariablen X und Y sei gegeben durch $f(x,y) := x(y-x)e^{-y}, 0 \le x \le y < \infty$.

   i) Finde reguläre Versionen der bedingten Verteilungen von X gegeben Y, und von Y gegeben X.

   ii) Berechne daraus $\mathbb{E}[X|Y]$ und $\mathbb{E}[Y|X]$.

b) Seien S, T und U unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parametern λ, μ, ν. Zeige, dass $\min(T, U)$ exponentialverteilt ist mit Parameter $\mu + \nu$, und berechne die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[T < U]$ und $\mathbb{P}[S < T < U]$.

2. (Poissonsche Bären)

In einem Dorf befinden sich zur Zeit $t = 0$ keine Bären. Braunbären und Grizzlybären treffen als voneinander unabhängige Poissonprozesse B und G mit den Intensitäten β und γ ein.

a) Zeige, dass der zuerst eintreffende Bär mit Wahrscheinlichkeit $\beta/(\beta+\gamma)$ ein Braunbär ist.

b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, mit der zwischen zwei aufeinanderfolgenden Braunbären genau r Grizzlybären in das Dorf kommen.

c) Berechne den bedingten Erwartungswert der Ankunftszeit des ersten Bären gegeben $B_1 = 1$.

3. (Poissonscher Wald)

Sei N ein Poissonprozess in $\mathbb{R}^2$ mit homogenem Intensitätsmaß $\lambda\, dx$, $\lambda > 0$, und seien $R_{(1)} < R_{(2)} < \dots$ die aufsteigend angeordneten Abstände der Punkte des Prozesses zum Ursprung.

a) Zeige, dass $R_{(1)}^2, R_{(2)}^2, \dots$ die Punkte eines Poissonprozesses auf $[0, \infty)$ mit Intensität $\pi\lambda$ bilden.

b) Zeige direkt oder mithilfe von a), dass die Dichtefunktion von $R_{(k)}$ folgende Form besitzt:

$$f(r) = \frac{2\pi\lambda r(\lambda\pi r^2)^{k-1} e^{-\lambda\pi r^2}}{(k-1)!}, \quad r > 0.$$

4. (Ein Unabhängigkeitsresultat für bedingte Erwartungen)
Seien X eine integrierbare (oder nichtnegative) und Y eine beliebige Zufallsvariable. Sei U eine von dem Paar (X, Y) unabhängige Zufallsvariable.

a) Zeige:
$$\mathbb{E}[X|Y, U] = \mathbb{E}[X|Y] \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.} \tag{1}$$

b) Demonstriere anhand eines Beispiels, dass (1) im Allgemeinen nicht gilt, wenn man nur Unabhängigkeit von X und U voraussetzt. Erkläre diese Tatsache anschaulich.