Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2010
Andreas Eberle, Frank Miebach

2. Übungsblatt „Stochastische Prozesse"

Abgabe bis Dienstag, 27.4.2010, 14 Uhr

---

1. (Berechnen von Verteilungen)

a) Sei X eine Poissonverteilte Zufallsvariable mit zufälligem Parameter Λ, wobei Λ exponentialverteilt ist mit Parameter μ. Bestimme die Verteilung von X.

b) Sei X eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable und sei $a > 0$. Zeige, dass die Zufallsvariable

$$Y := \begin{cases} X & \text{, falls } |X| < a \\ -X & \text{, falls } |X| \geq a \end{cases}$$

ebenfalls $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt ist und finde einen Ausdruck für $\rho(a) = Cov[X,Y]$ in Termen der Dichtefunktion ϕ von X. Ist das Paar (X,Y) bivariat normalverteilt?

2. (Eigenschaften der bedingten Erwartung)

Seien $X, Y \geq 0$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ eine σ–Algebra. Definiere, was eine Version der bedingten Erwartung von X gegeben $\mathcal{F}$ ist. Zeige, daß die folgenden Aussagen für beliebige Versionen der bedingten Erwartungen gelten:

a) $E[\,E[X|\mathcal{F}]\,] \;=\; E[X] \qquad P$–f.s.

b) Ist $\sigma(X)$ unabhängig von $\mathcal{F}$, dann gilt

$$E[X|\mathcal{F}] \;=\; E[X] \qquad P\text{–f.s.}$$

c) Ist Y $\mathcal{F}$–meßbar, dann gilt

$$E[Y \cdot X|\mathcal{F}] \;=\; Y \cdot E[X|\mathcal{F}] \qquad P\text{–f.s.}$$

d) $E[\lambda X + \mu Y|\mathcal{F}] \;=\; \lambda\, E[X|\mathcal{F}] + \mu\, E[Y|\mathcal{F}] \qquad P$–f.s. für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3. (Martingale)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und sei $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \cdots$ eine aufsteigende Folge von σ–Algebren $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{A}$. Anschaulich beschreibt $\mathcal{F}_n$ zum Beispiel die zum Zeitpunkt n zur Verfügung stehende „Information" über das Zufallsexperiment. Ein reellwertiger stochastischer Prozeß X_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt *Martingal* bzgl. $(\mathcal{F}_n)$ falls für alle $n \geq 0$ gilt:

(i) X_n ist $\mathcal{F}_n$–meßbar und integrierbar.

(ii) $E[X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n] \ = \ 0 \qquad P$–f.s. $\qquad$ *(„faires Spiel")*

Zeige:

a) Sind Y_i $(i \geq 0)$ unabhängig und integrierbar mit $E[Y_i] = 0$, dann ist

$$S_n \ = \ Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

ein Martingal bzgl. $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.

b) Für jede Zufallsvariable $X \in \mathcal{L}^1$ bilden die sukzessiven Prognosen

$$X_n \ = \ E[X | \mathcal{F}_n] \qquad\qquad \text{ein Martingal.}$$

c) Ist (X_n) ein Martingal mit $X_n \in \mathcal{L}^2$, dann sind die Inkremente $\Delta X_n := X_n - X_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ paarweise unkorreliert. Formuliere ein schwaches Gesetz der großen Zahlen für Martingale.

4. (Branching with immigration)
Each generation of a branching process (with a single progenitor) is augmented by a random number of immigrants who are indistinguishable from the other members of the population. Suppose that the numbers of immigrants in different generations are independent of each other and of the past history of the branching process, each such number having probability generating function $H(s)$. Show that the probability generating function G_n of the size of the nth generation satisfies

$$G_{n+1}(s) \ = \ G_n(G(s))H(s) \ ,$$

where G is the probability generating function of a typical family of offspring.

5. (* Zusatzaufgabe)
Seien $X_0, X_1, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit Dichte f und Verteilungsfunktion F, und sei

$$N \ = \ \min\{ n \geq 1 \,|\, X_n > X_0 \} \, .$$

Zeige, daß X_N die Verteilungsfunktion $F + (1 - F) \log(1 - F)$ hat.