

13. Übungsblatt „Stochastische Prozesse“

Abgabe bis Dienstag, 20.07.2010, 14 Uhr

1. (Maximalprozess der Brownschen Bewegung)

Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit $B_0 = 0$ und sei

$$M_1 := \max\{B_t : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Bestimme die Dichte von M_1 und berechne den Erwartungswert und die Varianz.

2. (Trefferzeiten der Brownschen Bewegung)

Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit $B_0 = 0$ und seien

$$T := \min\{t : |B_t| = 1\} \quad \text{und} \quad \tilde{T} := \min\{t : B_t = 1\}.$$

a) Zeige, dass es positive Konstanten c, β gibt, so dass

$$\mathbb{P}[T > t] \leq ce^{-\beta t}$$

für alle $t > 0$. Folgere $\mathbb{E}[T] < \infty$.

b) Berechne die Dichte von \tilde{T} und zeige, dass $\mathbb{E}[\tilde{T}] = \infty$.

c) Interpretiere die Ergebnisse anschaulich.