Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2010
Andreas Eberle, Frank Miebach

12. Übungsblatt „Stochastische Prozesse"

Abgabe bis Dienstag, 13.07.2010, 14 Uhr

---

1. (Brownsche Bewegung)

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit $B_0 = 0$. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

a) $B_2 > 2$.

b) $B_2 > B_1$.

c) $B_2 > B_1 > B_3$.

d) $B_t = 0$ für ein $t \in [2, 3]$.

e) $B_t < 4$ für alle $t \in [0, 3]$.

f) $B_t > 0$ für alle $t > 10$.

2. (Lokale Irregularität Brownscher Pfade)

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, und sei $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$. Zeige (z.B. mit einem ähnlichen Argument wie beim Beweis der Nicht–Differenzierbarkeit der Brownschen Pfade in der Vorlesung), dass P–f.s. gilt:

$$\limsup_{s\downarrow t} \frac{|B_s - B_t|}{|s-t|^\alpha} \;=\; \infty \qquad \text{für alle } t \in [0, 1)\,.$$

3. (Überschneidungen Brownscher Pfade)

Seien $(X_t)_{t\geq 0}$ und $(Y_t)_{t\geq 0}$ unabhängige eindimensionale Brownsche Bewegungen.

a) Zeige, dass $B_t := (X_t - Y_t)/\sqrt{2}$ eine Brownsche Bewegung ist.

b) Wahr oder falsch: Mit Wahrscheinlichkeit 1 ist $X_t = Y_t$ für unendlich viele $t > 0$.

4. (σ–Algebren und Maße auf $C([0,1])$)

a) Zeige, dass die Borelsche σ–Algebra $\mathcal{B}$ auf $\Omega := C([0,1],\mathbb{R})$, versehen mit der Supremumsnorm $\|\omega\| := \sup_{t\in[0,1]} |\omega(t)|$, mit der von den Projektionen $X_t(\omega) := \omega(t)$, $0 \le t \le 1$, erzeugten σ–Algebra übereinstimmt.

b) Zeige $\{\omega \in \Omega \,:\, \max_{0\le t\le 1} X_t(\omega) \ge c\} \in \mathcal{B}$ für alle $c > 0$.

c) Beweise, dass es kein (positives) Maß μ auf $(\Omega, \mathcal{B})$ mit den folgenden Eigenschaften gibt :

   i) Translationsinvarianz : $\mu(\omega + B) = \mu(B)$ für alle $\omega \in \Omega$ und $B \in \mathcal{B}$.

   ii) $0 < \mu(\{\omega \in \Omega \,:\, \|\omega\| < \varepsilon\}) < \infty$ für ein $\varepsilon > 0$.

   Also existiert kein Lebesguemaß auf dem unendlichdimensionalen Raum $C([0,1])$. Das Wienermaß ist in vielerlei Hinsicht ein natürlicher Ersatz.