Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2010
Andreas Eberle, Frank Miebach

11. Übungsblatt „Stochastische Prozesse"

Abgabe bis Dienstag, 06.07.2010, 14 Uhr

---

1. (Skaleninvarianz und Rekurrenz)
Sei B_t, $t \geq 0$, eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Sei $Z := \sup_{t \geq 0} B_t$. Zeige, daß λZ für jedes $\lambda > 0$ dieselbe Verteilung wie Z hat. Folgere $Z = +\infty$ P–f.s.

b) Zeige, daß die eindimensionale Brownsche Bewegung *rekurrent* ist, d.h. die Menge $\{t \geq 0 \, : \, B_t = a\}$ ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ P–f.s. nicht von oben beschränkt.

2. (Lokale Maxima Brownscher Pfade)
Sei B_t, $t \geq 0$, eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeige, daß die folgenden Aussagen für P–f.a. ω gelten :

a) Die Trajektorie $t \mapsto B_t(\omega)$ ist in keinem Intervall $[a, b]$, $a < b$, monoton.

b) Die Menge der lokalen Maxima von $t \mapsto B_t(\omega)$ ist dicht in $[0, \infty)$.

c) Alle lokalen Maxima von $t \mapsto B_t(\omega)$ sind strikt (d.h., für jedes lokale Maximum m gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_t(\omega) < B_m(\omega)$ für alle $t \in (m - \varepsilon, m + \varepsilon)$).

3. (Wiener–Lévy–Darstellung und quadratische Variation)
Die quadratische Variation $\langle x \rangle_t$ einer stetigen Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entlang der Folge der dyadischen Partitionen des Intervalls $[0, t]$ ist definiert durch

$$\langle x \rangle_t := \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{2^m} |x(t_i^{(m)}) - x(t_{i-1}^{(m)})|^2; \qquad t_i^{(m)} = i 2^{-m} t.$$

a) Zeige, dass die quadratische Variation einer stetig differenzierbaren Funktion x verschwindet, d.h. $\langle x \rangle_t = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

b) Sei

$$x(t) \ = x(1) \cdot t \, + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n - 1} a_{n,k} \cdot e_{n,k}(t), \qquad a_{n,k} \in \mathbb{R},$$

die Entwicklung einer Funktion $x \in C([0, 1])$ mit $x(0) = 0$ in der Basis der Schauderfunktionen. Zeige:

$$\langle x \rangle_1 = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{2^m} \sum_{n=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{2^n - 1} (a_{n,k})^2.$$

c) Folgere, daß Pfade der Brownschen Bewegung fast sicher quadratische Variation $\langle B\rangle_t = t$ haben. Warum genügt es den Fall $t = 1$ zu betrachten ?

d) Bestimme die quadratische Variation der ,,selbstähnlichen" Funktion

$$g(t) \ := \ t + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} e_{n,k}(t)$$

auf dem Intervall $[0,1]$, und auf $[0,t]$, $t \in [0,1)$. Vergleiche mit den Ergebnissen aus b) und c).

4. (Viertelfinale der WM 2010 in Südafrika)
Modelliere die Torabfolge in den ersten 90 Minuten eines WM-Spiels der deutschen Fußballnationalmannschaft durch eine zeitstetige Markovkette und schätze die Übergangsrate aus den Daten der letzten 20 WM-Spiele. Diskutiere Stärken und Schwächen des verwendeten Modells.

Deutschland - Mexiko 2:1. Tore: 0:1(47.), 1:1(75.), 2:1(86.).
Deutschland - Kroatien 0:3. Tore: 0:1(45.), 0:2(80.), 0:3(85.).
Deutschland - Saudi Arabien 8:0. Tore: 21., 26., 40., 45., 70., 72., 85., 90.
Deutschland - Irland 1:1. Tore: 1:0(19.), 1:1(90.).
Deutschland - Kamerun 2:0. Tore: 1:0(50.), 2:0(79.).
Deutschland - Paraguay 1:0. Tore: 1:0(88.).
Deutschland - USA 1:0. Tore: 1:0(39.).
Deutschland - Südkorea 1:0. Tore: 1:0(75.).
Deutschland - Brasilien 0:2. Tore: 0:2(67.), 0:2(79.).
Deutschland - Costa Rica 4:2. Tore: 1:0(6.), 1:1(12.), 2:1(17.), 3:1(61.), 3:2(73.), 4:2(87.).
Deutschland - Polen 1:0. Tore: 1:0(90.).
Deutschland - Ecuador 3:0. Tore: 1:0(4.), 2:0(44.), 3:0(57.).
Deutschland - Schweden 2:0. Tore: 1:0(4.), 2:0(12.).
Deutschland - Argentinien 1:1. Tore: 0:1(49.), 1:1(80.).
Deutschland - Italien 0:0.
Deutschland - Portugal 3:1. Tore: 1:0(56.), 2:0(61.), 3:0(78.), 3:1(88.).
Deutschland - Australien 4:0. Tore: 1:0(8.), 2:0(26.), 3:0(68.), 4:0(70.).
Deutschland - Serbien 0:1. Tore: 0:1(38.).
Deutschland - Ghana 1:0. Tore: 1:0(60.).
Deutschland - England 4:1. Tore: 1:0(20.), 2:0(32.), 2:1(38.), 3:1(67.), 4:1(70.).