Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2010
Andreas Eberle, Frank Miebach

10. Übungsblatt „Stochastische Prozesse"

Abgabe bis Dienstag, 29.06.2010, 14 Uhr

---

1. (Wiener-Lévy-Darstellung und Konstruktion der Brownschen Bewegung)
Die Schauderfunktionen $e_{n,k} \in C([0,1])$ sind wie folgt definiert :

$$e_{0,1}(t) := \min(t, 1-t),$$
$$e_{n,k}(t) := \begin{cases} 2^{-n/2} \cdot e_{0,1}(2^n t - k) & \text{für } t \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}], \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$. Für $x \in C([0,1])$ mit $x(0) = 0$ sei

$$a_{n,k} \;:=\; 2^{n/2} \cdot \Delta_{n,k} x \qquad \text{mit} \qquad \Delta_{n,k} x := 2 \cdot (x(m_{n,k}) - \bar{x}_{n,k}),$$

wobei $m_{n,k}$ der Mittelpunkt des dyadischen Intervalls $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$ ist, und $\bar{x}_{n,k} := (x((k+1) \cdot 2^{-n}) + x(k \cdot 2^{-n}))/2$. Zeige :

a) Die Funktionenfolge

$$x_m(t) \;:=\; x(1) \cdot t + \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{2^n-1} a_{n,k} \cdot e_{n,k}(t), \qquad m \in \mathbb{N},$$

konvergiert auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen x (*Satz von Schauder*). *(Hinweis : x_m ist die polygonale Approximation von x bzgl. der m–ten dyadischen Partition von* $[0,1]$*)*

b) Bezüglich des Wienermaßes P auf $\Omega = C([0,1])$ sind die Zufallsvariablen

$$X_1(\omega) \qquad \text{und} \qquad Y_{n,k}(\omega) \;:=\; 2^{n/2} \cdot \Delta_{n,k} X(\omega) \qquad (n \geq 0, 0 \leq k < 2^n),$$

unabhängig und $N(0,1)$–verteilt, und es gilt die *Wiener–Lévy Darstellung*

$$(1) \qquad X_t(\omega) \;=\; X_1(\omega) \cdot t + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} Y_{n,k}(\omega) \cdot e_{n,k}(t) \qquad \text{für alle } \omega.$$

*c) Umgekehrt seien X_1 und $Y_{n,k}$ $(n \geq 0, 0 \leq k < 2^n)$ unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Zeige mithilfe des Weierstraßschen Kriteriums für gleichmäßige Konvergenz von Reihen und des Borel–Cantelli–Lemmas, dass die Reihe in (1) auf $[0,1]$ fast sicher gleichmäßig konvergiert. Dies liefert eine explizite Konstruktion der Brownschen Bewegung.
(*Hinweis: Für $Y \sim N(0,1)$ gilt:* $P[|Y| > n] \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{n} \exp(-n^2/2)$.)

2. (Symmetrien der Brownschen Bewegung)
Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine stetige eindimensionale Brownsche Bewegung mit Start in 0. Zeige, dass folgende Prozesse Brownsche Bewegungen sind:

$$\text{(i)} \ -B_t \qquad \text{(ii)} \ B_{t+h} - B_h \ \ (h \geq 0 \text{ fest}) \qquad \text{(iii)} \ \frac{1}{\sqrt{a}} B_{at} \ \ (a > 0 \text{ fest}).$$

3. (Queues)
Customers arrive at a single-server queue in a Poisson stream of rate λ. Each customer has a service requirement distributed as the sum of two independent exponential random variables of parameter μ. Service requirements are independent of one another and of the arrival process.

a) Write down the generator matrix of a continuous-time Markov chain which models this, explaining what the states of the chain represent.

b) Determine the equilibrium distribution and the asymptotic average queue length.

4. (Asymptotik zeitdiskreter Markovketten)

a) Es sei (X_n, P) eine irreduzible zeithomogene Markovkette mit diskretem Zustandsraum S und Gleichgewicht π. Sei A eine Teilmenge des Zustandsraumes S, und für $k \geq 1$ sei T_k die k-te Rückkehr- bzw. Trefferzeit von A. Zeige:

$$\lim_{k\uparrow\infty} \frac{T_k}{k} = \frac{1}{\pi[A]} \qquad\qquad P\text{-fast sicher.}$$

b) Eine Maus bewegt sich zufällig horizontal oder vertikal auf einem Schachbrett mit 16 Quadraten. (Diagonale Bewegungen sind nicht erlaubt!) In jedem Schritt bewegt sie sich von ihrem aktuellen Standpunkt auf dem Brett auf eines der k angrenzenden zulässigen Quadrate mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{k}$. Es seien D die Menge der Quadrate des Schachbrettes und $(X_n)_{n\geq 0}$ die beschriebene Markovkette mit Zustandsraum D.

   i) Zeige, dass X_n irreduzibel und positiv rekurrent ist.

   ii) Berechne die Gleichgewichtsverteilung.