Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2010
Andreas Eberle, Frank Miebach

1. Übungsblatt „Stochastische Prozesse”

Abgabe bis Dienstag, 20.4.2010, 14 Uhr

---

1. (Bedingte Erwartungen)

Seien $X, Y : \Omega \to [0, \infty)$ unabhängige identisch verteilte diskrete Zufallsvariablen mit Erwartungswert m.

a) Wo liegt der Fehler in der folgenden Argumentation:

$$E[X|X+Y=z] \;=\; E[X|X=z-Y] \;=\; E[z-Y] \;=\; z-m\,?$$

b) Zeige:

$$E[X|X+Y] \;=\; \frac{1}{2}\,(X+Y)\,.$$

c) Kann man auf ähnliche Weise

$$E[X|X\cdot Y] \;=\; (X\cdot Y)^{1/2}$$

zeigen?

2. (Fehlererkennung)

Eine Fabrik stellt Roboter her, die mit Wahrscheinlichkeit p defekt sind. Ein Test erkennt Fehler (falls vorhanden) mit Wahrscheinlichkeit $1-\varepsilon$.

a) Zeige: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Roboter, der den Test passiert hat, trotzdem defekt ist, beträgt $\varepsilon p/(1-p+\varepsilon p)$.

b) Die Fabrik stellt an einem Tag n Roboter her. Sei X die Anzahl der defekten Roboter, und Y die Anzahl der als defekt erkannten. Zeige unter geeigneten Unabhängigkeitsannahmen:

$$E[X|Y] \;=\; Y+(n-Y)\cdot\frac{\varepsilon p}{1-p+\varepsilon p} \;=\; \frac{\varepsilon pn+(1-p)Y}{1-p+\varepsilon p}\,.$$

3. (Transformationen exponentialverteilter Zufallsvariablen)
Seien T und R unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parametern λ und μ. Berechnen Sie:

a) Die bedingte Verteilung von T gegeben $T + R$.

b) Die Verteilung von T/R.

4. (Eigenschaften der bedingten Erwartung)
Seien $Y : \Omega \to S$ eine diskrete Zufallsvariable, und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine integrierbare reellwertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie:

a) Die Abbildung $X \mapsto E[X|Y]$ ist P–f.s. linear und monoton.

b) Aus $X = \tilde{X}$ P-f.s. folgt $E[X|Y] = E[\tilde{X}|Y]$ P-f.s.

c) Für alle $f : S \to \mathbb{R}$ mit $f(Y) \cdot X \in \mathcal{L}^1$ gilt:

$$E[f(Y) \cdot X|Y] \;=\; f(Y) \cdot E[X|Y] \qquad P\text{–f.s.}$$

Was ergibt sich, falls X und Y unabhängig sind ?