Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 10/11
Andreas Eberle, Thomas Kruse/Matthias Erbar

8. Übungsblatt „Grundzüge der Stoch. Analysis"

Abgabe bis Di 7.12. 14 Uhr, Postfach im Schließfachraum (LWK)

---

1. (Itô- und Stratonovich-Integrale) Sei (B_t) eine Brownsche Bewegung.

a) Zeigen Sie ausgehend von der Definition des Itô-Integrals :

$$\int_0^t B_s \, dB_s \;=\; \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

Sie können dazu die Aussage von Aufgabe 3 auf Blatt 7 verwenden.

b) Das Stratonovich-Integral von (B_t) bezüglich (B_t) ist definiert durch

$$\int_0^t B_s \circ dB_s \;:=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{s\in\pi_n} \frac{1}{2}(B_{s'} + B_s)\cdot(B_{s'} - B_s) \qquad \text{in } L^2(P).$$

Zeigen Sie :

$$\int_0^t B_s \circ dB_s \;=\; \frac{1}{2}B_t^2\,.$$

Das Itô- und das Stratonovich Integral stimmen also nicht überein !

2. (Wiener-Integrale) Wir betrachten das stochastische Integral

$$I_t \;:=\; \int_0^t h(s)\, dB_s, \qquad 0 \le t \le 1\,,$$

einer *deterministischen* Funktion $h \in L^2([0,1], ds)$ bezüglich der Brownschen Bewegung.

a) Verwenden Sie eine Approximation des Integrals durch Riemannsummen um zu zeigen, dass I_t normalverteilt ist mit Erwartungswert 0 und Varianz

$$\tau(t) \;=\; \int_0^t h(r)^2\, dr\,.$$

b) Zeigen Sie allgemeiner, dass die Inkremente des Prozesses (I_t) über disjunkten Zeitintervallen unabhängig sind mit Verteilung

$$I_t - I_s \;\sim\; N(0, \tau(t) - \tau(s))\,.$$

c) Folgern Sie, dass (I_t) dieselbe Verteilung auf $C([0,1])$ hat wie die zeittransformierte Brownsche Bewegung $t \mapsto B_{\tau(t)}$.

3. (Stieltjes-Integrale)

a) Geben Sie die Definition des Lebesgue–Stieltjes Integrals

$$\int_0^t f(s)\, dg(s)$$

einer lokal beschränkten Borel-messbaren Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ bezüglich einer monoton wachsenden stetigen Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ an.

b) Für eine stetige Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definieren wir die *Variation* im Intervall $[0, t]$ durch

$$V^{(1)}(t) \;:=\; \sup_{\pi} \sum_i |g(t_{i+1}) - g(t_i)| \;,$$

wobei das Supremum über alle Partitionen von $[0, t]$ genommen wird. Zeigen Sie, dass die Funktionen $V^{(1)}$ und $V^{(1)} - g$ monoton wachsend sind. Benutzen Sie dies, um die Definition des Lebesgue–Stieltjes Integrals auf Funktionen g von beschränkter Variation zu erweitern.

c) Sei (π_n) eine Folge von Partitionen mit Feinheit $|\pi_n| \to 0$. Zeigen Sie: Ist g stetig und von beschränkter Variation, und ist f stetig, dann existiert das Integral

$$\int_0^t g(s)\, df(s) \;:=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i \in \pi_n \\ t_i \le t}} g(t_i)\,(f(t_{i+1}) - f(t_i))$$

und es gilt die partielle Integrationsformel

$$\int_0^t f(s)\, dg(s) \;=\; f(t)g(t) \;-\; f(0)g(0) \;-\; \int_0^t g(s)\, df(s) \;.$$

Insbesondere ist $\int g\, df$ unabhängig von der Wahl der Folge (π_n).

4. (Teufelstreppen) Sei (X_n) eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $P[X_n = 0] = P[X_n = 2] = \frac{1}{2}$, und sei

$$Y \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cdot 3^{-n} \;.$$

a) Geben Sie die Verteilungsfunktion von Y explizit an.

b) Zeigen Sie, dass F fast überall differenzierbar ist mit $F'(y) = 0$.

c) Seien nun X_n unabhängige Zufallsvariablen mit $P[X_n = 1] = p$ und $P[X_n = 0] = 1 - p$. Wann ist die Verteilungsfunktion von $Y = \sum X_n \cdot 2^{-n}$ absolutstetig ?