Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 10/11
Andreas Eberle, Thomas Kruse/Matthias Erbar

7. Übungsblatt „Grundzüge der Stoch. Analysis"

Abgabe bis Di 30.11., 14 Uhr, Postfach im Schließfachraum (LWK)

---

1. (Wiener-Paley Definition des stochastischen Integrals). Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit $B_0 = 0$. Für $h \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ kann man das stochastische Integral von h bezüglich B wie folgt durch partielle Integration definieren:

$$\int_0^1 h(s)dB_s \;:=\; h(1)B_1 - \int_0^1 h'(s)\,B_s\,ds$$

a) Zeige, dass die Zufallsvariable $\int_0^1 h(s)dB_s$ normalverteilt ist mit Erwartungswert 0 und Varianz $\int_0^1 h(s)^2 ds$. Insbesondere gilt also:

$$E\left[\left(\int_0^1 h(s)dB_s\right)^2\right] = \int_0^1 h(s)^2 ds.$$

b) Verwende diese Isometrie, um das Integral $\int_0^1 h(s)dB_s$ für alle $h \in L^2(0,1)$ zu definieren.

2. (Konvergenz von Riemann-Itô Summen).

a) Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ auf $(\Omega,\mathcal{A},P)$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)$, und sei $(H_t)_{t\geq 0}$ ein $(\mathcal{F}_t)$ adaptierter, produktmessbarer Prozess, der *stetig im quadratischen Mittel* ist, d.h. für alle $t \geq 0$ gelte:

$$H_t \in L^2(P) \quad \text{und} \quad \lim_{s\to t} E[(H_s - H_t)^2] = 0.$$

Zeige:

$$\int_0^t H_s dB_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{s\in\pi_n} H_s(B_{s'} - B_s) \quad \text{in } L^2(P)$$

für alle Folgen (π_n) von Partitionen von $[0,t]$ mit $|\pi_n| \to 0$.

b) Zeige, dass der Prozess $H_t := f(B_t)$ stetig im quadratischen Mittel ist, wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lipschitzstetige Funktion ist.

3. (Quadratische Variation der Brownschen Bewegung). Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung. Zeige

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{s\in\pi_n} (B_{s'} - B_s)^2 = t \quad \text{in } L^2(P)$$

für alle Folgen (π_n) von Partitionen von $[0,t]$ mit $|\pi_n| \to 0$.

4. (Lebesgue-Zerlegung auf separablen σ-Algebren). Seien P und Q zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Eine *Lebesgue-Dichte von Q bezüglich P* ist eine bzgl. P integrierbare Zufallsvariable $Z : \Omega \to [0,\infty]$, so dass Q zerlegt werden kann in $Q = Q_a + Q_s$ mit

$$Q_a[A] := \int_A Z dP, \quad Q_s[A] := Q[A \cap \{Z = \infty\}] \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}.$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass eine Lebesgue-Dichte immer existiert, falls $\mathcal{A}$ separabel ist.

a) Sei Z eine Lebesgue-Dichte von Q bezüglich P. Zeige, dass $1/Z$ eine Lebesgue-Dichte von P bezüglich Q ist, wenn wir $1/\infty := 0$ und $1/0 := \infty$ setzen.

Ab jetzt sei $\mathcal{A}$ separabel mit $\mathcal{A} = \sigma(\cup \mathcal{F}_n)$ wobei die Filtration $(\mathcal{F}_n)$ aus σ-Algebren $\mathcal{F}_n$ bestehe, welche jeweils von endlich vielen Atomen erzeugt werden.

b) Zeige, dass Q auf $\mathcal{F}_n$ eine Lebesgue-Dichte Z_n bezüglich P hat, und gib diese explizit an.

c) Zeige

$$Q[Z_n = \infty \text{ und } Z_{n+1} < \infty] = 0 \qquad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Folgere, dass (Z_n) ein nichtnegatives Supermartingal unter P ist, während $(1/Z_n)$ ein nichtnegatives Supermartingal unter Q ist.

d) Zeige, dass der Grenzwert $Z_\infty = \lim_{n\to\infty} Z_n$ sowohl P-f.s. als auch Q-f.s. existiert, und

$$Z_\infty < \infty \ \ P\text{-fast sicher,} \qquad \text{sowie} \qquad Z_\infty > 0 \ \ Q\text{-fast sicher} \qquad \text{gilt.}$$

e) Folgere, dass Z_∞ eine Lebesgue-Dichte von Q bezüglich P auf $\mathcal{A}$, und $1/Z_\infty$ eine Lebesgue-Dichte von P bezüglich Q auf $\mathcal{A}$ ist.