Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 10/11
Andreas Eberle, Thomas Kruse/Matthias Erbar

6. Übungsblatt „Grundzüge der Stoch. Analysis"

Abgabe bis Di 23.11. 14 Uhr, Postfach im Schließfachraum (LWK)

---

1. (Absolutstetigkeit von Produktmaßen) Die Zufallsvariaben $X_i,\ i \in \mathbb{N}$, auf $(\Omega, \mathcal{A})$ seien unabhängig und normalverteilt unter den Wahrscheinlichkeitsmaßen P und Q, mit Verteilung $N(0,1)$ unter P und Verteilung $N(a_i, 1)$ unter Q .

a) Berechnen Sie die relative Dichte

$$Z_n = \left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathcal{F}_n}$$

und die relative Entropie

$$H_n(Q|P) := \int \log Z_n \, dQ$$

von Q bezüglich P auf $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

b) Zeigen Sie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad Q \ll P \text{ auf } \mathcal{F}_\infty \ .$$

2. (Martingale und Maßwechsel) Sei $(\mathcal{F}_n)$ eine aufsteigende Folge von σ-Algebren auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß Q sei lokal absolutstetig bezüglich P mit relativer Dichte Z_n auf $\mathcal{F}_n$. Zeigen Sie :

a) $Z_n > 0$ Q-fast sicher. Genauer : Für $\xi = \min\{n \geq 0 | Z_n = 0\}$ gilt $Q[\xi < \infty] = 0$.

b) Für einen adaptierten Prozess (M_n) gilt :

$$E_Q[M_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] = \frac{1}{Z_n} E_P[M_{n+1} Z_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] \ .$$

c) (M_n) ist genau dann ein Martingal bezüglich Q , wenn $(Z_n \cdot M_n)$ ein Martingal bezüglich P ist.

d) Ist $Z_n > 0$ P-f.s. für alle n, so ist (Z_n^{-1}) ein Martingal bezüglich Q. P ist dann lokal absolutstetig bezüglich Q mit relativer Dichte Z_n^{-1} auf $\mathcal{F}_n$.

3. (Gleichgradige Integrierbarkeit)

a) Sei $\{X_i : i \in I\}$ eine Familie von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $\sup E[|X_i|] < \infty$. Zeigen Sie, dass die Familie genau dann gleichgradig integrierbar ist, wenn die Maße $Q_i(A) = E[|X_i|\,;\,A]$ gleichgradig absolutstetig bezüglich P sind, d.h. genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für $A \in \mathcal{A}$ gilt :

$$P[A] \;<\; \delta \quad\Longrightarrow\quad \sup_{i \in I} E[|X_i|\,;\,A] \;<\; \varepsilon\ .$$

b) Sei X eine integrierbare Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie, dass die Familie

$$\{E[X\,|\,\mathcal{F}] \;:\; \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra}\}$$

der bedingten Erwartungen von X gegeben die Unter-σ-Algebren von $\mathcal{A}$ gleichgradig integrierbar ist.

4. (Supermartingalkonvergenzsatz in stetiger Zeit) Sei $t_0 \in (0, \infty]$. Beweisen Sie den Supermartingalkonvergenzsatz: *Sei $(Z_s)_{s \in [0,t_0)}$ ein rechtsstetiges Supermartingal mit*

$$\sup_{s \in [0,t_0)} E[Z_s^-] < \infty\ .$$

Dann existiert der Grenzwert $Z_{t_0} = \lim_{s \uparrow t_0} Z_s$ fast sicher, und Z_{t_0} ist integrierbar.

Führen Sie zum Beweis folgende Schritte aus :

a) Für $t \in [0, t_0)$ definieren wir die Anzahl der Aufwärtsüberquerungen über das Intervall (a, b) durch

$$U_t^{(a,b)}[Z] \;:=\; \sup_{\pi \subset [0,t]\ \text{endlich}} U^{(a,b)}\left[(Z_s)_{s \in \pi}\right]\ .$$

Sei (π_n) eine Folge von Partitionen von $[0, t]$ mit Feinheit δ_n, so dass $\pi_n \subset \pi_{n+1}$ und $\delta_n \to 0$. Zeigen Sie : $\quad U_t^{(a,b)}[Z] = \lim_{n \to \infty} U^{(a,b)}\left[(Z_s)_{s \in \pi_n}\right]$.

b) Beweisen Sie die Upcrossing-Ungleichung : Für jedes $t \in [0, t_0)$ und $a < b$ gilt

$$E\left[U_t^{(a,b)}[Z]\right] \;\le\; \frac{1}{b-a} E\left[(Z_t - a)^-\right]\ .$$

c) Folgern Sie nun den Konvergenzsatz analog zum entsprechenden Satz für zeitdiskrete Supermartingale.

d) Zeigen Sie allgemeiner : Mit Wahrscheinlichkeit 1 existieren *alle* linksseitigen Limiten $\lim_{s \uparrow t} Z_s$, $t \in (0, t_0]$, simultan, d.h. fast jeder Pfad ist *càdlàg*.