Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 10/11
Andreas Eberle, Thomas Kruse/Matthias Erbar

5. Übungsblatt „Grundzüge der Stoch. Analysis"

Abgabe bis Di 16.11., 14 Uhr, Postfach im Schließfachraum (LWK)

---

1. (Gleichgradige Integrierbarkeit).

a) Für welche Folgen (a_n) reeller Zahlen ist die Folge

$$X_n = a_n \cdot I_{(0,1/n)}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

gleichgradig integrierbar bzgl. der Gleichverteilung auf dem Intervall $(0,1)$?

b) Zeige, dass das exponentielle Martingal $M_t = \exp(B_t - t/2)$ einer eindimensionalen Brownschen Bewegung (B_t) nicht gleichgradig integrierbar ist.

2. (Galton-Watson Prozess). Wir betrachten einen Verzweigungsprozess

$$Z_0 = 1, \quad Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} N_i^n \text{ für } n \geq 1,$$

wobei die Nachkommenszahlen $N_i^n : \Omega \to \mathbb{N}_0$ für $n, i \geq 1$ unabhängige Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit identischer Verteilung ν, Erwartungswert m und Varianz $\sigma^2 \in (0, \infty)$ sind. Sei $\mathcal{F}_n := \sigma(N_i^k | k \leq n, i \geq 1)$ die von den Nachkommenszahlen der ersten n Generationen erzeugte σ-Algebra.

a) Zeige per Induktion für $n \in \mathbb{N}$:

$$E[Z_n] = m^n, \quad Var[Z_n] = \begin{cases} \sigma^2 m^{n-1} \dfrac{m^n - 1}{m - 1} & \text{falls } m \neq 1, \\ \sigma^2 n & , \text{ falls } m = 1. \end{cases}$$

b) Weise nach, dass der Prozess $M_n := Z_n / m^n$ ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)$ ist, und folgere, dass M_n für $n \to \infty$ f.s. gegen ein $M_\infty \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ konvergiert.

c) Sei $\pi := P[Z_n = 0 \text{ schließlich }]$ die Aussterbewahrscheinlichkeit des Verzweigungsprozesses. Zeige, dass der Prozess im subkritischen Fall ($m \leq 1$) f.s. ausstirbt ($\pi = 1$).

d) Betrachte nun den superkritischen Fall ($m > 1$). Zeige, dass $P[M_\infty = 0] = \pi$ gilt und folgere, dass für P-f.a. $\omega \in \Omega$ die Population $Z_n(\omega)$ entweder exponentiell wächst oder ausstirbt.

Hinweis: Verwende die Charakterisierung von π als einzigem Fixpunkt der Erzeugendenfunktion von ν in $[0,1)$ (s. Abschnitt 10.2 im Skript "Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse")

3. (Poissonapproximation des Wrightschen Evolutionsmodells). Es sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0$, Anfangszustand $x \in \mathbb{N}_0$, und Übergangsmatrix

$$p(i,k) = e^{-\lambda i}\frac{(\lambda i)^k}{k!} \quad (i \geq 1, k \geq 0), \qquad p(0,0) = 1\,.$$

Wie ist der Zusammenhang mit multinomialem Resampling (Wrightsches Evolutionsmodell) ? Zeige:

a) Im Fall $\lambda = 1$ ist (X_n) ein Martingal bzgl. P_x mit

$$\lim_{n\to\infty} X_n = 0 \quad P_x\text{-f.s.}.$$

b) Für $T_a := \min\{n \geq 0 | X_n \geq a\}$ gilt dann

$$P_x\left[\max_n X_n \geq a\right] = P_x[T_a < \infty] \leq \frac{x}{a}.$$

c) Was kann man im Fall $\lambda \neq 1$ mit Martingalmethoden aussagen ?

4. (ABRAKADABRA). Zu jeder der Zeiten $1, 2, 3, \ldots$ tippt ein Affe einen zufälligen Buchstaben auf einer Schreibmaschine. Die Folge der Buchstaben bilde eine i.i.d. Folge von auf $\{A, B, C, \ldots, Z\}$ gleichverteilten Zufallsvariablen. Wie lange dauert es im Mittel, bis der Affe das Wort „ABRAKADABRA" getippt hat ?

Anleitung: Ein Spieler startet zu jedem der Zeitpunkte $n = 1, 2, \ldots$ eine mehrstufige Wette der folgenden Bauart: Er setzt 1 Euro darauf, dass der n–te Buchstabe ein A ist. Wenn er verliert, beendet er die Wette. Wenn er gewinnt, setzt er die erhaltenen 26 Euro darauf, dass der $(n+1)$–te Buchstabe ein B ist. Wenn er verliert, beendet er die Wette. Wenn er gewinnt, setzt er seinen Gewinn von 26^2 Euro darauf, dass der $(n+2)$–te Buchstabe ein R ist usw.

Sei T die erste Zeit, zu der der Affe die Folge „ABRAKADABRA" reproduziert hat.

a) Erkläre anschaulich, warum

$$E[T] \;=\; 26^{11} + 26^4 + 26$$

gelten sollte.

b) Beweise dies rigoros.