Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 10/11
Andreas Eberle, Thomas Kruse/Matthias Erbar

4. Übungsblatt „Grundzüge der Stoch. Analysis"

Abgabe bis Di 9.11., 14 Uhr, Postfach im Schließfachraum (LWK)

---

1. (Martingale und Stoppzeiten der Brownschen Bewegung) Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine d-dimensionale Brownsche Bewegung. Zeigen Sie:

a) Die folgenden Prozesse sind Martingale, und zwar sowohl bzgl. $(\mathcal{F}_t^B)$ als auch bzgl. der rechtsstetigen Filtration $(\mathcal{F}_t)$, $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}^B$:

   i) Die Koordinatenprozesse $B_t^{(i)}$, $\quad 1 \leq i \leq d$,

   ii) $B_t^{(i)} B_t^{(j)} - t\delta_{ij}$, $\quad 1 \leq i, j \leq d$,

   iii) $\exp(\alpha \cdot B_t - \frac{1}{2}|a|^2 t)$, $\quad$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}^d$.

b) Ist $A \subset \mathbb{R}^d$ abgeschlossen, dann ist die erste Trefferzeit

$$T_A = \inf\{t \geq 0 : B_t \in A\}$$

eine Stoppzeit bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_t^B)$.

c) Ist $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, dann ist T_U eine Stoppzeit bzgl. der rechtsstetigen Filtration $(\mathcal{F}_t)$, aber im Allgemeinen keine Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_t^B)$.

2. (Treffer- und Passierzeiten der Brownschen Bewegung) Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit Start in 0. Fr $a, b > 0$ sei

$$T \;=\; \inf\{t \geq 0 \;:\; B_t \notin (-b, a)\} \qquad \text{und} \qquad T_a \;=\; \inf\{t \geq 0 \;:\; B_t = a\} \;.$$

Aus der Vorlesung "Stochastische Prozesse" ist bekannt, dass die Stoppzeiten T und T_a fast sicher endlich sind. Zeigen Sie durch Anwenden des Stoppsatzes:

a) Ruinwahrscheinlichkeiten: $P[B_T = a] = b/(a+b)$ und $P[B_T = -b] = a/(a+b)$.

b) Mittlere Austrittszeit: $E[T] = a \cdot b$ und $E[T_a] = \infty$.

c) Laplacetransformation der Passierzeit: $E\left[\exp(-sT_a)\right] = \exp(-a\sqrt{2s})$ für alle $s > 0$.

*d) Verteilung der Passierzeit auf $(0, \infty)$: T_a ist absolutstetig mit Dichte

$$f_{T_a}(t) \;=\; a(2\pi t^3)^{-\frac{1}{2}} \exp(-a^2/2t) \;.$$

3. (Satz vom iterierten Logarithmus) Beweisen Sie den Satz vom iterierten Logarithmus : *Fr eine Brownsche Bewegung* $(B_t)_{t\geq 0}$ *mit* $B_0 = 0$ *gilt*

$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{B_t}{h(t)} = +1 \quad \textit{und} \quad \liminf_{t\downarrow 0} \frac{B_t}{h(t)} = -1 \,,$$

wobei $h(t) = \sqrt{2t \log\log t^{-1}}$.

Führen Sie zum Beweis folgende Schritte aus :

a) Formulieren Sie noch einmal den Beweis aus der Vorlesung für die obere Schranke

$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{B_t}{h(t)} \leq +1 \,. \tag{1}$$

Folgern Sie, dass ebenso gilt :

$$\liminf_{t\downarrow 0} \frac{B_t}{h(t)} \geq -1 \,. \tag{2}$$

Nun soll eine entsprechende untere Schranke bewiesen werden.

b) Für $\theta \in (0,1)$ betrachten wir die Inkremente $Z_n = B_{\theta^n} - B_{\theta^{n+1}}$. Zeigen Sie, dass für $\varepsilon > 0$ und geeignete θ gilt :

$$P[Z_n > (1-\varepsilon)h(\theta^n) \text{ unendlich oft}] = 1 \,.$$

Hinweis : Verwenden sie die Abschätzung $\int_x^\infty e^{-z^2/2}dz \geq \frac{1}{2x}e^{-x^2/2}, \quad x \geq \sqrt{2}$.

c) Folgern Sie unter Verwendung von (2), dass

$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{B_t}{h(t)} \geq 1-\delta \tag{3}$$

für alle $\delta > 0$ gilt. Leiten Sie nun die Behauptung her.

4. (Bin Packing) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit Werten in $[0,1]$. Wieviele Behälter der Größe 1 werden benötigt, um Objekte der Größen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zu verpacken ? Sei B_n die minimale Anzahl der nötigen Behälter, und sei

$$M_k := E[B_n|\sigma(X_1,\ldots,X_k)]\,, \qquad 0 \leq k \leq n \,.$$

Zeigen Sie $|M_k - M_{k-1}| \leq 1$, und folgern Sie

$$P[|B_n - E[B_n]| \geq \varepsilon] \leq 2 \cdot e^{-\frac{\varepsilon^2}{2n}} \,.$$

Bemerkung: Man kann zeigen, daß $E[B_n]$ *asymptotisch linear in* n *wächst.*