Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 10/11
Andreas Eberle, Thomas Kruse/Matthias Erbar

3. Übungsblatt „Grundzüge der Stoch. Analysis"

Abgabe bis Di 2.11., 14 Uhr, Postfach im Schließfachraum (LWK)

---

1. (Trefferzeiten für den zweidimensionalen Random Walk). Z_n sei der Random Walk auf $\mathbb{Z}^2$, der in z_0 startet und mit gleicher Wahrscheinlichkeit einen Schritt in eine der vier Richtungen macht.

a) Zeige, dass $|Z_n|^2 - n$ ein Martingal ist.

b) Für $r > |z_0|$ sei
$$T \;:=\; \inf\{n \geq 0 \,|\, |Z_n|^2 \geq r^2\}$$
die Austrittszeit aus dem Kreis um 0 mit Radius r. Zeige:
$$r^2 - |z_0|^2 \;\leq\; E[T] \;\leq\; (r+1)^2 - |z_0|^2 \,.$$

2. (Star trek I). Das Kontrollsystem im Raumschiff Enterprise spielt verrückt. Das einzige, was man noch tun kann, ist eine Entfernung einzustellen. Das Raumschiff legt diese Entfernung in einer zufällig ausgewählten Richtung zurück und hält dann an. Das Ziel ist es, das Sonnensystem zu erreichen – eine Kugel vom Radius r. Nach dem n-ten Sprung befindet sich die Enterprise an der Stelle X_n mit einem Abstand $R_n = |X_n|$ zur Sonne (dem Zentrum des Koordinatensystems). Es gelte $R_0 > r$.

a) Zeige: Für jede Strategie, bei der stets eine Distanz kleiner dem momentanen Abstand gewählt wird, ist $1/R_n$ ein Martingal (– im Allgemeinen ist $1/R_n$ ein Supermartingal).
Hinweis: Benutze die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen (Beweis?): Gilt $\Delta f = 0$ auf einer Kugel $B \subset \mathbb{R}^d$, dann ist $f(x) = ⨍_{\partial B} f$.

b) Folgere: $\quad P[\,\text{Enterprise erreicht das Sonnensystem}\,] \;\leq\; r/R_0\,.$

c) Für jedes $\varepsilon > 0$ kann man eine Strategie wählen, bezüglich der die Wahrscheinlichkeit größer als $(r/R_0) - \varepsilon$ ist. Wie sieht so eine Strategie aus ?

3. (Random signs). Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen mit $\sum a_n^2 = \infty$, und
$$M_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k\,, \qquad \varepsilon_k \text{ i.i.d. mit } \; P[\varepsilon_k = \pm 1] = 1/2.$$

a) Bestimme den Varianzprozess von (M_n).

b) Für $c > 0$ sei

$$T \;:=\; \inf\{n \geq 0 \,|\, |M_n| \geq c\}\,.$$

Wende den Stoppsatz auf den Martingalteil in der Doobzerlegung von (M_n^2) an. Folgere, dass $P[T = \infty] = 0$ gilt.

c) Zeige, dass (M_n) P–fast sicher unbeschränkt oszilliert.

4. (Maximalungleichungen und große Abweichungen).

a) Zeige: Ist (M_n) ein Martingal und $t > 0$, dann gilt

$$P\left[\max_{k\leq n} M_k \geq c\right] \;\leq\; e^{-tc}\, E\left[e^{tM_n}\right] \qquad \forall\, c > 0.$$

b) Sei $S_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ mit i.i.d. Zufallsvariablen $Y_i \in \mathcal{L}^1$ mit $E[Y_i] = 0$. Beweise die folgende Erweiterung des Satzes von Chernoff:

$$P\left[\max_{k\leq n} S_k \geq a\cdot n\right] \;\leq\; e^{-\Lambda^*(a)\cdot n} \qquad \forall\, a > 0,$$

wobei $\Lambda^*(a) = \sup_{t>0}(ta - \Lambda(t))$, $\Lambda(t) = \log E[e^{tY_1}]$.

5. (Optionspreisberechnung im Cox-Ross-Rubinstein Modell).
Sei $\Omega = \{1+a, 1+b\}^N$, $X_i(\omega) = \omega_i$, und $\mathcal{F}_n = \sigma(X_i | i \leq n)$. Die Preisentwicklung eines Wertpapiers in N Perioden wird im CRR-Binomialmodell durch $S_n = S_0 \prod_{i=1}^n X_i$ beschrieben, wobei der Startpreis S_0 deterministisch sei. Für den Zins r gelte $-1 < a < r < b < \infty$, die diskontierten Preise werden mit $\tilde{S}_n = S_n/(1+r)^n$ bezeichnet. Der Payoff einer Option mit Maturität N sei durch eine Funktion $F : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben.

a) Zeige per Rückwärtsinduktion, dass eine adaptierte Folge $(\tilde{V}_n)_{0\leq n\leq N}$ und eine prävisible Folge $(\phi_n)_{1\leq n\leq N}$ existieren mit

$$F/(1+r)^N \;=\; \tilde{V}_n + \sum_{i=n+1}^{N} \phi_i(\tilde{S}_i - \tilde{S}_{i-1}) \qquad \text{für jedes } n = N, N-1, \ldots, 0.$$

b) Folgere, dass $F = V_N$ gilt, wobei (V_n) die durch

$$V_n = V_{n-1} + \phi_n \cdot (S_n - S_{n-1}) + (V_{n-1} - \phi_n S_{n-1}) \cdot r$$

gegebene Kapitalentwicklung bei Startkapital $V_0 = \tilde{V}_0$ und Anlagestrategie (ϕ_n) ist. Erläutere, warum V_0 der einzige Optionspreis ist, bei dem Arbitrage ausgeschlossen ist.

Bemerkung: Im CRR Modell existiert also für jede Option eine replizierende Strategie. Marktmodelle mit dieser Eigenschaft werden als vollständig bezeichnet.

c) Berechne explizit den arbitragefreien Preis einer europäischen Calloption mit Maturität N und Ausübungspreis K, d.h. für $F = (S_N - K)^+$.