Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 10/11
Andreas Eberle, Thomas Kruse/Matthias Erbar

2. Übungsblatt „Grundzüge der Stoch. Analysis"

Abgabe bis Di 26.10., 14 Uhr, Postfach im Schließfachraum (LWK)

---

1. (Stoppsatz für Supermartingale). Sei X_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ein Supermartingal bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_n)$, und sei C_n $(n = 1, 2, \ldots)$ eine prävisible Folge von beschränkten, nichtnegativen Zufallsvariablen.

a) Wie ist das diskrete stochastische Integral $C \bullet X$ definiert ? Zeige, dass $C \bullet X$ wieder ein Supermartingal ist.

b) Formuliere und beweise einen Stoppsatz für Supermartingale.

2. (Ruinproblem für den asymmetrischen Random Walk). Sei $p \in (0, 1)$ mit $p \neq \frac{1}{2}$. Wir betrachten den Random Walk $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, Y_i $(i \geq 1)$ i.i.d. mit $P[Y_i = +1] = p$ und $P[Y_i = -1] = q := 1 - p$.

a) Zeige, dass folgende Prozesse Martingale sind:

$$M_n \; := \; \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}, \qquad N_n \; := \; S_n - n(p - q)\,.$$

b) Für $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a < 0 < b$ sei $T := \min\{n \geq 0 \,|\, S_n \notin (a, b)\}$. Folgere aus a):

$$P[S_T = a] \;=\; \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^b}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{b-a}} \qquad \text{und}$$

$$E[T] \;=\; \frac{b}{p - q} - \frac{b - a}{p - q} \cdot \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^b}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{b-a}}\,.$$

3. (Martingalformulierung von Bellman's Optimalitätsprinzip). Der Gewinn pro Einsatz 1 in der n–ten Runde eines Spiels sei ε_n, wobei die ε_n i.i.d. Zufallsvariablen mit

$$P[\varepsilon_n = +1] = p\,, \qquad P[\varepsilon_n = -1] = q := 1-p\,, \qquad \frac{1}{2} < p < 1,$$

sind. Der Einsatz C_n in der n–ten Runde muss zwischen 0 und Z_{n-1} liegen, wobei Z_{n-1} das Kapital zur Zeit $n-1$ ist. Sei $N \in \mathbb{N}$ die Spieldauer. Unser Ziel ist es, die mittlere ,,Zinsrate" $E[\log(Z_N/Z_0)]$ zu maximieren, wobei das Anfangskapital Z_0 eine vorgegebene Konstante ist. Zeige: Für *jede* (prävisible) Strategie ist $\log Z_n - n\alpha$ ein Supermartingal, wobei

$$\alpha \;:=\; p\log p + q\log q + \log 2 \qquad \text{(Entropie)},$$

und für eine bestimmte Strategie ist es sogar ein Martingal. Es gilt also

$$E[\log(Z_N/Z_0)] \leq N\alpha$$

mit Gleichheit bei geeigneter Wahl der Strategie. Wie sieht die optimale Strategie aus ?

4. (Diskretes Dirichlet-Problem). Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, P_x)$ die kanonische zeithomogene Markovkette mit Zustandsraum $(S, \mathcal{S})$, Übergangskern p und Start in $x \in S$. Sei $D \in \mathcal{S}$ und $f : D^c \to \mathbb{R}$ messbar, und sei

$$T \;:=\; T_{D^c} \;=\; \min\{n \geq 0 \mid X_n \in D^c\}$$

die erste Austrittszeit der Markovkette aus D. Im letzten Semester haben wir gezeigt, dass

$$h(x) \;=\; E_x[f(X_T)\;;\; T < \infty]$$

eine Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} p\,h &= h \qquad \text{auf } D\,, \\ h &= f \qquad \text{auf } D^c\,. \end{aligned}$$

ist, falls f nichtnegativ oder beschränkt ist. Zeigen Sie nun folgendes:

a) Gilt $P_x[T < \infty] = 1$ für alle $x \in S$ und ist f beschränkt, dann ist $h(X_{T\wedge n})$ für jede beschränkte Lösung h des Dirichlet-Problems und für jedes $x \in S$ ein Martingal bzgl. P_x.

b) In diesem Fall ist h die einzige beschränkte Lösung des Dirichlet-Problems.

c) Ist f nichtnegativ, dann ist h die minimale nichtnegative Lösung des DP.

5. (Verschärfung von Murphy's Gesetz). *[Alles was eine realistische Chance hat zu passieren, wird auch passieren — und zwar eher früher als später.]*
Sei T eine Stoppzeit. Es existiere ein $k \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ mit

$$P\,[T \leq n + k \,|\, \mathcal{F}_n] \;>\; \varepsilon \qquad P\text{–f.s. für alle } n \geq 0.$$

Zeige durch Induktion für alle $i \in \mathbb{N}$

$$P[T > ik] \;\leq\; (1-\varepsilon)^i\,,$$

und folgere $E[T] < \infty$.