Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 10/11
Andreas Eberle, Thomas Kruse/Matthias Erbar

11. Übungsblatt „Grundzüge der Stoch. Analysis"

Abgabe bis Di 18.1., 14 Uhr, Postfach im Schließfachraum (LWK)

---

1. (Variation der Konstanten). Lösen Sie die stochastische Differentialgleichung

$$dY_t = r\,dt + \alpha\, Y_t\, dB_t$$

für eine eindimensionale Brownsche Bewegung (B_t) und Konstanten $r, \alpha \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $r = 0$, und führen Sie dann im allgemeinen Fall einen Ansatz mit Variation der Konstanten in der erhaltenen Lösung durch.

2. (Komplexe Brownsche Bewegung). Eine komplexwertige Brownsche Bewegung ist gegeben durch $B_t = B_t^1 + i\,B_t^2$ mit unabhängigen eindimensionalen Brownschen Bewegungen (B_t^1) und (B_t^2).

a) Zeige: Ist F holomorph, dann gilt

$$F(B_t) \;=\; F(B_0) \;+\; \int_0^t F'(B_s)\, dB_s\;,$$

wobei F' die komplexe Ableitung von F bezeichnet.

Hinweis: Verwende die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

b) Löse die komplexe SDG $\quad dZ_t \;=\; \alpha\, Z_t\, dB_t\;, \quad \alpha \in \mathbb{C}\,.$

3. (Itô–Diffusionen I). Sei $b \in C_b(\mathbb{R})$, und sei $(X_t)_{t\geq 0}$ bzgl. P_x eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t \;=\; b(X_t)\,dt \;+\; dB_t\;, \qquad X_0 = x \;\; P_x\text{–f.s.},$$

mit einer eindimensionalen Brownschen Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$. Zeige:

a) X_t löst bzgl. P_x das *zeitabhängige Martingalproblem* zum Generator

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} \;+\; b(x)\cdot\frac{d}{dx}\;,$$

d.h. für alle $u \in C^{1,2}$ ist

$$M_t \;:=\; u(t, X_t) - u(0, X_0) - \int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u\right)(X_s)\, ds$$

ein lokales Martingal.

b) Für $f \in C_b^2(\mathbb{R})$ gilt die *Kolmogorovsche Vorwärtsgleichung*

$$E_x[f(X_t)] \;=\; f(x) + \int_0^t E_x[\mathcal{L}f(X_s)]\,ds\,.$$

c) $\mu_t(A) := P_\mu[X_t \in A]$ ist eine Lösung (im distributionellen Sinn) von

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial t} \;=\; \mathcal{L}^*\mu_t\ , \text{ d.h.}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int f\,d\mu_t \;=\; \int \mathcal{L}f\,d\mu_t \qquad \forall\, f \in C_b^2\,.$$

d) *Rückwärtsgleichung:* Für $f \in C_b(\mathbb{R})$ ist

$$u(t,x) = E_x[f(X_t)] \tag{1}$$

die eindeutige beschränkte Lösung von

$$\frac{\partial u}{\partial t} \;=\; \mathcal{L}u\ , \qquad u(0,x) = f(x)\,.$$

(Existenz einer Lösung $u \in C_b^{1,2}$ kann vorausgesetzt werden; es ist also nur zu zeigen, dass für jede beschränkte Lösung die Darstellung (1) gilt.)

4. (Wärmeleitung in einem endlichen Stab). Sei $u \in C^{1,2}((0,\infty)\times(a,b))$ $(-\infty < a < b < \infty)$ eine bis zum Rand stetige, beschränkte Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \;=\; \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - V(x)\,u(t,x) \qquad \text{mit}$$

$$u(0,x) = f(x),\quad u(t,a) = h(t),\quad u(t,b) = k(t),$$

$V : (a,b) \to [0,\infty)$ stetig und beschränkt. Zeige mithilfe eines geeigneten Martingals:

$$\begin{aligned} u(t,x) \;&=\; E_x\left[f(B_t)\,\exp\left(-\int_0^t V(B_s)\,ds\right)\,;\ t \le T_a \wedge T_b\right] \\ &+\; E_x\left[h(t-T_a)\,\exp\left(-\int_0^{T_a} V(B_s)\,ds\right)\,;\ T_a < t \wedge T_b\right] \\ &+\; E_x\left[k(t-T_b)\,\exp\left(-\int_0^{T_b} V(B_s)\,ds\right)\,;\ T_b < t \wedge T_a\right]\,. \end{aligned}$$

Info der Fachschaft: Am 18.01.2011 findet in der N8Schicht Bonn die Mathe-Party statt. Einlass ist ab 22 Uhr. Karten gibt es im VVK beim AWD der Fachschaft oder vom 12.1.-14.1. jeweils von 11 bis 13 Uhr in der Poppmensa.