Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 10/11
Andreas Eberle, Thomas Kruse/Matthias Erbar

10. Übungsblatt „Grundzüge der Stoch. Analysis"

Abgabe bis Di 11.1., 14 Uhr, Postfach im Schließfachraum (LWK)

---

1. (Geometrische Brownsche Bewegung) Eine geometrische Brownsche Bewegung mit Parametern $\mu, \alpha \in \mathbb{R}$ ist eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t \;=\; \mu\, X_t\, dt \;+\; \alpha\, X_t\, dB_t\,.$$

Sie wird z.B. zur Modellierung von Aktienkursen eingesetzt.

a) Finden Sie eine Lösung der SDG mit Anfangsbedingung $X_0 = x_0$ mithilfe des Ansatzes

$$X_t \;=\; x_0 \cdot \exp(aB_t + bt)\,.$$

b) Berechnen Sie $E[X_t]$ für $t \geq 0$. Was fällt auf im Fall $0 < \mu < \alpha^2/2$?

c) Berechnen Sie $\mathrm{cov}\,[X_s, X_t]$.

2. (Lösungen stochastischer Differentialgleichungen)

a) Sei (B_t) eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit $B_0 = 0$. Zeigen Sie, dass die folgenden Prozesse die jeweilige stochastische Differentialgleichung lösen :

i) $X_t = B_t/(1+t)$ erfüllt

$$dX_t = -(1+t)^{-1} X_t\, dt + (1+t)^{-1}\, dB_t\;; \qquad X_0 = 0\,.$$

ii) $X_t = \sin B_t$ erfüllt

$$dX_t = -\frac{1}{2} X_t\, dt + \sqrt{1 - X_t^2}\, dB_t \qquad \text{für } t < \inf\{s > 0 : B_s \notin [-\pi/2, \pi/2]\}\;.$$

iii) $(X_t, Y_t) = (t, e^t B_t)$ löst

$$\begin{bmatrix} dX_t \\ dY_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ Y_t \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{X_t} \end{bmatrix} dB_t\;.$$

iv) $(X_t, Y_t) = (\cosh(B_t), \sinh(B_t))$ erfüllt

$$\begin{bmatrix} dX_t \\ dY_t \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} Y_t \\ X_t \end{bmatrix} dB_t\;.$$

b) Zeigen Sie, dass der Prozess $X_t = (B_t + t)\exp(-B_t - \frac{1}{2}t)$ ein Martingal ist.

3. (Erweiterte Itô–Formel) Sei $X : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig mit stetiger quadratischer Variation. Zeigen Sie, dass für $g \in C^1$ und $F \in C^2$ das Itô–Integral

$$\int_0^t g(X_s)\, dF(X)_s$$

existiert, und die Itô–Formel

$$\int_0^t g(X_s)\, dF(X)_s \;=\; \int_0^t g(X_s)\, F'(X_s)\, dX_s \;+\; \frac{1}{2} \int_0^t g(X_s)\, F''(X_s)\, d\langle X \rangle_s$$

gilt. Dies rechtfertigt die differentielle Kurzschreibweise

$$dF(X) \;=\; F'(X)\, dX \;+\; \frac{1}{2} F''\, d\langle X \rangle\,,$$

der Itô–Formel, denn nun ist auch multiplizieren dieser „Gleichung" mit $g(X)$ erlaubt !

4. (Quadratische Variation von Itô–Integralen) Sei $X : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit stetiger quadratischer Variation (bzgl. einer festen Partitionenfolge (π_n)).

a) Sei $F \in C^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Funktion $t \mapsto F(X_t)$ quadratische Variation

$$\langle F(X) \rangle_t \;=\; \int_0^t F'(X_s)^2\, d\langle X \rangle_s \qquad \text{entlang } (\pi_n) \text{ hat.}$$

b) Folgern Sie, dass das Itô–Integral $I_t = \int_0^t f(X_s)\, dX_s$ für $f \in C^1$ quadratische Variation

$$\langle I(f) \rangle_t \;=\; \int_0^t f(X_s)^2\, d\langle X \rangle_s \qquad \text{hat.}$$

c) Sei $H \in L^2(P \otimes \lambda)$ stetig, beschränkt und adaptiert bezüglich der Brownschen Bewegung (B_t). Zeigen Sie :

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\sum_{s \in \pi_n} \left(\int_s^{s'} (H_u - H_s)\, dB_u \right)^2 \right] \;=\; 0\,.$$

Folgern Sie, dass für $I_t = \int_0^t H_s dB_s$ bzgl. stochastischer Konvergenz gilt :

$$\langle I \rangle_t \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{s \in \pi_n} (I_{s'} - I_s)^2 \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{s \in \pi_n} H_s^2 \cdot (B_{s'} - B_s)^2 \;=\; \int_0^t H_s^2\, ds$$

5. (Mehrdimensionale Itô–Formel und Poisson–Problem)

a) Formulieren und beweisen Sie eine Itô–Formel für eine Brownsche Bewegung in $\mathbb{R}^d$.

b) Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, $g \in C(\bar{D})$, und $f \in C(\partial D)$. Zeigen Sie: Ist $u \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$ eine Lösung des Poisson–Problems

$$\frac{1}{2}\Delta u \;=\; -g \;\text{ auf } D\,, \qquad u = f \;\text{ auf } \partial D\,,$$

dann gilt

$$u(x) \;=\; E_x\left[\int_0^{T_{D^c}} g(B_t)\,dt\right] + E_x\left[f(B_{T_{D^c}})\right] \qquad \forall\, x \in D\,,$$

wobei B_t bzgl. P_x eine Brownsche Bewegung mit Start in x ist.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr 2011 !