Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 10/11
Andreas Eberle, Matthias Erbar

1. Übungsblatt „Grundzüge der Stoch. Analysis"

Abgabe bis Di 19.10., 14 Uhr, Postfach im Schließfachraum (LWK)

---

1. (Martingaldefinition). Zeigen Sie :

a) Ein prävisibles Martingal ist P–f.s. konstant.

b) Für ein nichtnegatives Martingal $(X_n)_{n\geq 0}$ gilt P–fast sicher :

$$X_n(\omega) = 0 \quad \Rightarrow \quad X_{n+k}(\omega) = 0 \text{ für alle } k \geq 0\ .$$

c) Konstruieren Sie ein Martingal $(X_n)_{n\geq 0}$ mit

$$E[X_n] = 0 \text{ für alle } n \quad \text{, aber} \quad X_n \to -\infty \quad P\text{–f.s.}$$

2. (Stoppsatz). Sei $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ eine Filtration. Eine Zufallsvariable $T : \Omega \to \{0,1,2,\ldots\} \cup \{\infty\}$ heißt *Stoppzeit* falls $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ für alle $n \geq 0$ gilt.

a) Beweisen Sie durch Induktion : Ist $(X_n)_{n\geq 0}$ ein Martingal und T eine Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_n)$, dann gilt

$$E[X_{T\wedge n}] \ = \ E[X_0] \qquad \forall\, n \geq 0\ .$$

b) Unter welchen Voraussetzungen folgt

$$E[X_T] \ = \ E[X_0] \ \ ?$$

3. (Martingale des Random Walk). Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ der klassische Random Walk mit Start in $x \in \mathbb{Z}$, d.h. :

$$X_n \ = \ x + S_n\,, \qquad S_n \ = \ Y_1 + \ldots + Y_n\,, \qquad Y_i \ \text{ i.i.d. mit } \ P[Y_i = \pm 1] \ = \ \frac{1}{2}\ .$$

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Prozesse Martingale sind :

$$\text{(i) } X_n \qquad \text{(ii) } M_n \ := \ X_n^2 - n \qquad \text{(iii) } M_n^\lambda \ := \ e^{\lambda X_n - a(\lambda)n} \ \text{ für jedes } \lambda \in \mathbb{R}\ ,$$

wobei $a(\lambda) := \log\cosh\lambda$.

b) Für $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a < x < b$ sei

$$T(\omega) \;:=\; \min\{n \geq 0 \,|\, X_n(\omega) \notin (a,b)\,\}\ .$$

Zeigen Sie durch Anwenden des Stoppsatzes (s. Aufgabe 2) auf das Martingal X_n :

$$P[X_T = a] \;=\; \frac{b-x}{b-a}\ .$$

c) Leiten Sie mithilfe des Stoppsatzes eine Formel für $E[T]$ her.

4. (Stochastische Lyapunov-Bedingung). Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $S = \mathbb{N}$, Startpunkt $x_0 \in S$ und Übergangsmatrix $p(x,y)$. Sei $u \geq 0$ eine superharmonische Funktion auf S, d.h. es gelte

$$u(x) \;\geq\; pu(x) \;=\; \sum_{y\in S} p(x,y)\cdot u(y)$$

für alle $x \in S$. Dann spielt u die Rolle einer *stochastischen Lyapunov–Funktion*:

a) $\big(u(X_n)\big)$ ist ein nichtnegatives Supermartingal, dessen Doob-Zerlegung $u(X_n) = M_n + A_n$ durch

$$A_n \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}(pu-u)(X_k)\ , \quad n \geq 0$$

gegeben ist.

b) Für $S_\varepsilon := \{x \in S \mid (u-pu)(x) \geq \varepsilon\}$ mit $\varepsilon > 0$ gilt

$$E\left[\sum_{n=0}^{\infty} I_{S_\varepsilon}(X_n)\right] \;\leq\; \frac{u(x_0)}{\varepsilon}\ ,$$

d.h. die Aufenthaltszeit in S_ε hat einen endlichen Erwartungswert.

Insbesondere ergibt sich folgendes Stabilitätskriterium :

(i) Aus $\bigcap_{\varepsilon>0} S_\varepsilon^c = \{z\}$ und S_ε^c endlich für ein $\varepsilon > 0$ folgt :

$$P\left[\lim_{n\to\infty} X_n = z\right] \;=\; 1\ .$$

(ii) Aus $\bigcap_{\varepsilon} S_\varepsilon^c = \emptyset$ folgt :

$$P\left[\lim_{n\to\infty} X_n = \infty\right] \;=\; 1\ .$$