Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2024
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

Nachklausur „Einführung in die Statistik"

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen:

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Studiengang:	

Wichtige Hinweise:

- **Es sind keine eigenen Unterlagen, Handys, Taschenrechner u.ä. zugelassen!**
- **Am Ende der Klausur finden Sie einige Verteilungstabellen.**
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Bitte legen Sie den Studentenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis gut sichtbar neben Ihren Platz!
- Abgabe bis spätestens 11.00 Uhr.

Viel Erfolg!

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	**Summe**	**Note**
Punkte							

1. (Einige kurze Fragen) *[25 Pkt.]*

Bei dieser Aufgabe brauchen Sie keine Begründungen und Erläuterungen anzugeben.

a) Seien $x_1, \ldots, x_n$ unabhängige, identisch verteilte, reelle Beobachtungswerte. Geben Sie Plug-in-Schätzer für die folgenden Kenngrößen der zugrundeliegenden Verteilung an:

   (i) Mittelwert

   (ii) Standardabweichung

   (iii) Verteilungsfunktion

b) Geben Sie kurze, aber vollständige Definitionen der folgenden Begriffe an:

   (i) Statistisches Modell

   (ii) Statistik

   (iii) Pivot

c) Wir betrachten nun ein reguläres statistisches Modell mit Parametermenge $\Theta = \mathbb{R}$ und Likelihood $L(\theta; x) = f_\theta(x)$. Geben Sie kurze, aber vollständige Definitionen der folgenden Begriffe an:

   (i) Suffiziente Statistik

   (ii) Fisher-Information

d) Geben Sie das Modell, die Nullhypothese, und die Test-Statistiken für die folgenden Hypothesentests an:

   (i) t-Test

   (ii) Chiquadrat-Anpassungstest

e) Geben Sie die Formel für die Dichte der a posteriori Verteilung in einem Bayesschen Modell mit Likelihood $L(\theta; x) = f(x|\theta)$ an, wenn die a priori Verteilung absolutstetig ist mit Dichte $f(\theta)$.

Lösung:

a) (i) $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_n$

   (ii) $v_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}$

   (iii) $\hat{F}_n(c) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{x_i \leq c}$

b) (i) Statistisches Modell:

$$(\Omega, \mathfrak{A}, (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta}, X)\ ,$$

   wobei $(\Omega, \mathfrak{A})$ messbarer Raum, Θ Menge, $\mathbb{P}_\vartheta$ Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ für alle $\vartheta \in \Theta$, $X : \Omega \to S$ messbare Abbildung in messbaren Raum $(S, \mathfrak{B})$.

(ii) Statistik: Abbildung $T \circ X$ mit $T : S \to \mathbb{R}$ messbar.

(iii) Pivot: Abbildung $T : S \times \Theta \to \mathbb{R}$ so, dass $\mathbb{P}_\vartheta \circ T(X, \vartheta)^{-1}$ nicht von ϑ abhängt.

c) (i) Suffiziente Statistik: $T(X)$ ist suffizient, falls Funktionen g, h existieren, so dass

$$f_\vartheta(x) \;=\; g(\vartheta, T(x))h(x) \quad \text{für alle } x \in S, \vartheta \in \Theta \;,$$

d.h. die Likelihood hängt von ϑ nur durch $T(x)$ ab.

(ii) Fisher-Information:

$$I(\vartheta) \;=\; \int \big(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f_\vartheta(x)\big)^2 f_\vartheta(x) dx$$

d) (i) t-Test: Gaußmodell $X_1, \dots X_n \sim \mathcal{N}(m, v)$ i.i.d., $H_0 : m = m_0$,

$$T(X) \;=\; \sqrt{n-1} \frac{\bar{X}_n - m_0}{\sqrt{V_n}}$$

mit den Plug-in Schätzern aus Aufgabenteil a).

(ii) Chiquadrat-Anpassungstest: $X_1, \dots, X_n \sim \mu$ mit einer unbekannten Wahrscheinlichkeitsverteilung μ auf $\{a_1, \dots a_k\}$, $H_0 : \mu = \mu_0$,

$$T(X) \;=\; nD_2(L_n|\mu_0) \;=\; n \sum_{l=1}^{k} \big(\frac{L_n(a_l)}{\mu_0(a_l)} - 1\big)^2 \mu_0(a_l)$$

mit der empirischen Verteilung $L_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}$.

e)

$$f(\vartheta|x) \;=\; \frac{f(x|\vartheta) f(\vartheta)}{\int f(x|\vartheta) f(\vartheta) d\vartheta}$$

2. (Schätzer und Konfidenzintervalle) *[25 Pkt.]*

Es sei $\vartheta \in \mathbb{R}$ ein unbekannter Parameter und seien $X_i = Y_i + \vartheta$, $1 \le i \le n$, unabhängige reelle Zufallsvariablen, deren Realisierungen Sie beobachten können. Sie nehmen an, dass die Y_i exponentialverteilt sind mit Intensität 1.

a) Geben Sie die Dichtefunktion $f_\vartheta(x_i)$ der Verteilung von X_i an, und berechnen Sie den Median dieser Verteilung.

b) Geben Sie die Likelihood-Funktion $L(\vartheta; x_1, \ldots, x_n)$ an.

c) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für ϑ.

d) Erläutern Sie kurz, warum der Maximum-Likelihood-Schätzer nicht robust ist.

e) Geben Sie einen robusten Schätzer für ϑ an.

f) Konstruieren Sie im Fall $n = 1$ ein Konfidenzintervall für ϑ zum Niveau e^{-3}.

Lösung:

a) Die Dichtefunktion der Verteilung von X_i ist

$$f_\vartheta(x) \;=\; e^{-(x-\vartheta)} \mathbf{1}_{x-\vartheta \ge 0} \;.$$

Der Median ist $m_\vartheta = \vartheta + \log 2$, da für alle $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int_c^\infty f_\vartheta(x)dx \;&=\; \int_c^\infty e^{-(x-\vartheta)} \mathbf{1}_{x-\vartheta\ge 0} dx \;=\; \int_{c-\vartheta}^\infty e^{-x} \mathbf{1}_{x \ge 0} dx \;=\; \int_{\max(c-\vartheta,0)}^\infty e^{-x} dx \qquad (1) \\ &=\; e^{-\max(c-\vartheta,0)} \;=\; \frac{1}{2} \end{aligned}$$

genau dann, wenn $c = \vartheta + \log 2$.

b) Aufgrund der Unabhängigkeit, ist die Likelihood

$$L(\vartheta; x_1, \ldots, x_n) \;=\; \prod_{i=1}^n f_\vartheta(x_i) \;=\; e^{-\sum_{i=1}^n (x_i - \vartheta)} \mathbf{1}_{\min_{1\le i \le n} x_i - \vartheta \ge 0} \;.$$

c) Die Likelihood ist monoton wachsend in ϑ für $\vartheta \le \min_{1 \le i \le n} x_i$ und verschwindet für größere ϑ. Daher ist der MLE für ϑ

$$\hat{\vartheta}_{MLE} \;=\; \min_{1 \le i \le n} X_i \;.$$

d) Der MLE ist nicht robust, da er nur vom kleinsten Wert der X_i abhängt und somit durch Verändern eines der X_i beliebig verändert werden kann.

e) Aus Aufgabenteil a) ist bekannt, dass der Median der Verteilung der X_i durch $m_\vartheta = \vartheta + \log 2$ gegeben ist. Damit ist

$$\hat{\vartheta} \;=\; M_n - \log 2$$

mit dem Stichprobenmedian M_n ein plug-in Schätzer für ϑ. Dieser ist robust mit Bruchpunkt 1/2.

f) Sei $n = 1$, so dass die Sichprobe $X_1 = X$ ist. Da laut (1), $\vartheta < X$ mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt, benutzen wir den Ansatz $C(X) = (X - c, X)$ für $c > 0$. Dann gilt für alle $\vartheta \in \mathbb{R}$ mit (1)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\vartheta(\vartheta \in C(X)) \;&=\; \mathbb{P}_\vartheta(X - c < \vartheta < X) \;=\; \mathbb{P}_\vartheta(\vartheta < X < \vartheta + c) \;=\; \mathbb{P}_\vartheta(X < \vartheta + c)\\ &=\; 1 - \mathbb{P}_\vartheta(X \geq \vartheta + c) \;=\; 1 - \int_{\vartheta+c}^{\infty} f_\vartheta(x)dx \;=\; 1 - e^{-c} \;\geq\; 1 - e^{-3}\end{aligned}$$

genau dann, wenn $c \geq 3$. Also ist $C(X) = (X - 3, X)$ ein Konfidenzintervall für ϑ zum Niveau e^{-3}.

3. (Tests und p-Werte) *[25 Pkt.]*

Sie führen ein Experiment durch und beobachten Messwerte $x_1, \dots, x_n > 0$, von denen Sie annehmen, dass sie Realisierungen unabhängiger, im Intervall $(0, \vartheta)$ mit $\vartheta > 0$ gleichverteilter Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ sind. Sie interessieren sich nun für ϑ und konstruieren mit der Statistik

$$T(X_1, \dots, X_n) \;=\; \max(X_1, \dots, X_n)$$

einen Test für

$$H_0 : \vartheta = 1/2 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \vartheta > 1/2 \,,$$

der die Nullhypothese verwirft, wenn $T(X_1, \dots, X_n) > c$ für einen Schwellenwert $c > 0$.

a) Berechnen und skizzieren Sie die Machtfunktion des Tests.

b) Es sei $T(x_1, \dots, x_n) = t$ der beobachtete Wert der Statistik. Ist für das obige Testproblem der rechtsseitige oder der linksseitige p-Wert relevant? Berechnen Sie diesen.

c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von n den kleinstmöglichen Schwellenwert für den der Test Signifikanzniveau $\alpha \in (0, 1)$ hat.

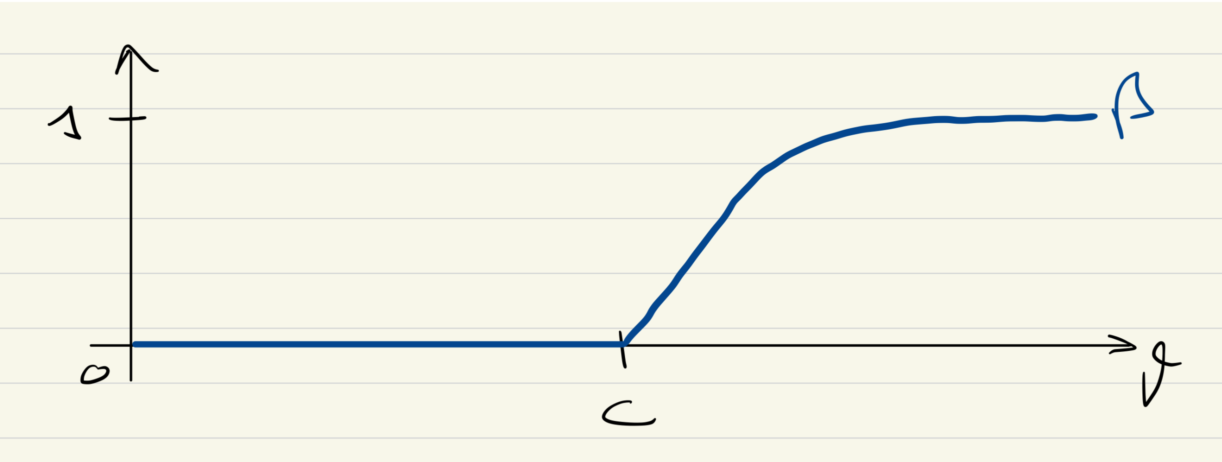
d) Es sei $n = 20$ und Sie beobachten $t = 0{,}475$. Was können Sie anhand des p-Werts über die Nullhypothese $\vartheta = 1/2$ aussagen? Was gilt entsprechend für $t = 0{,}51$? *Hinweis: Sie können die Näherung* $(1 + \frac{x}{n})^n \approx e^x$ *verwenden.*

Lösung:

a) Mit $\varphi(X_1, \dots, X_n) = \mathbf{1}_{\max(X_1, \dots, X_n) > c}$, ist die Machtfunktion

$$\begin{aligned}\beta(\vartheta) \;&=\; \mathbb{E}_\vartheta \varphi(X_1, \dots, X_n) \;=\; \mathbb{P}_\vartheta(\max(X_1, \dots, X_n) > c) \;=\; 1 - \mathbb{P}_\vartheta(\max(X_1, \dots, X_n) \le c) \\ &=\; 1 - \mathbb{P}_\vartheta(X_i \le c \;\forall i) \;=\; 1 - \mathbb{P}_\vartheta(X_1 \le c)^n \;=\; 1 - \min(c/\vartheta, 1)^n \;=\; (1 - (c/\vartheta)^n)\mathbf{1}_{\vartheta \ge c} \,,\end{aligned}$$

wobei wir in Schritt 4 die identische Verteilung, in Schritt 5 die Unabhängigkeit der X_i und in Schritt 6 $X_1 \sim \mathrm{Unif}(0, \vartheta)$ benutzt haben.



b) Da wir die Nullhypothese verwerfen, falls $t > c$ ist, ist der rechtsseitige p-Wert relevant. Dieser ist laut Aufgabenteil a) mit $\vartheta_0 = 1/2$

$$p_r \;=\; \mathbb{P}_{\vartheta_0}(T > t) \;=\; (1 - (t/\vartheta_0)^n)\mathbf{1}_{\vartheta_0 \geq t} \;=\; (1 - (2t)^n)\mathbf{1}_{t \leq 1/2} \;.$$

c) Der Test hat Signifikanzniveau α, falls $p_r \leq \alpha$. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$t \;\geq\; \frac{1}{2}(1-\alpha)^{1/n} \;.$$

Der kleinstmöglichste Schwellenwert ist folglich $\frac{1}{2}(1-\alpha)^{1/n}$.

d) Sei $n = 20$ und $t = 0,475$. Mit der gegebenen Approximation gilt

$$p_r \;=\; 1 - (2t)^n \;=\; 1 - (0,95)^{20} \;=\; 1 - (1 - 1/20)^{20} \;\approx\; 1 - e^{-1} \;.$$

Wir können die Nullhypothese folglich nur zum Niveau $1 - e^{-1} \approx 0.63$ verwerfen. Für $t = 0.51$ ist ϑ mit Sicherheit größer als $1/2$, so dass wir die Nullhypothese verwerfen können.

4. (Entropie) *[15 Pkt.]*

Es sei S eine endliche Menge und $\mu = (\mu(x))_{x \in S}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf S.

a) Definieren Sie die Entropie $H(\mu)$ der Verteilung μ.

b) Geben Sie alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen an, die die Entropie minimieren bzw. maximieren.

c) Beweisen Sie Ihre Aussage zu Aufgabenteil b).

Lösung:

a)

$$H(\mu) \;=\; - \sum_{x \in S : \mu(x) \neq 0} \mu(x) \log \mu(x)$$

b) Die Entropie wir genau von allen Dirac Maßen minimiert und von der Gleichverteilung maximiert.

c) Da $\mu(x) \in [0,1]$, gilt $H(\mu) \geq 0$. Weiter sind alle Summanden negativ (mit dem Minuszeichen vor der Summe). Also gilt

$$H(\mu) \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in S : \mu(x) \in \{0,1\} \quad \Leftrightarrow \quad \mu \text{ ist Dirac Maß.}$$

Das beweist, dass H genau von allen Dirac Maßen minimiert wird.

Da $f(x) = x \log x$ konvex ist, gilt mit der Jensen'schen Ungleichung

$$\begin{aligned} H(\mu) &\;=\; -|S| \frac{1}{|S|} \sum_{x \in S : \mu(x) \neq 0} f(\mu(x)) \;\leq\; -|S| f\Big(\frac{1}{|S|} \sum_{x \in S : \mu(x) \neq 0} \mu(x) \Big) \;=\; -|S| f(1/|S|) \\ &\;=\; -\log(1/|S|) \;=\; \log |S| \;. \end{aligned}$$

Weiter sagt die Jensen'sche Ungleichung aus, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn alle Summanden $\mu(x)$ gleich sind, d.h. wenn μ die Gleichverteilung auf S ist. Das beweist, dass genau die Gleichverteilung die Entropie maximiert.

5. (Regression) *[15 Pkt.]*

Für zwei Objekte mit unbekannten Gewichten w_1 und w_2 werden die Gewichte der Einzelobjekte, die Summe und Differenz der Gewichte gemessen. Jede der vier Messungen sei mit einem unabhängigen Fehler mit Mittelwert 0 und Varianz v behaftet.

a) Stellen Sie für diese Situation ein lineares Modell auf.

b) Bestimmen Sie den Kleinste-Quadrate-Schätzer für $(w_1, w_2)^T$.

c) Es wurden die Messwerte 3,1, 2,6, 5,7, 0,5 beobachtet. Geben Sie den Wert des Schätzers aus Aufgabenteil b) an.

Lösung:

a) Mit den Gewichten $w = (w_1, w_2)^t \in \mathbb{R}^2$, den Messungen $Y \in \mathbb{R}^4$ und den unabhängigen Fehlern $\varepsilon \in \mathbb{R}^4$ mit $\mathbb{E}\varepsilon_i = 0$ und $\mathbb{E}\varepsilon_i^2 = v$, ist das lineare Modell gegeben durch

$$Y = Aw + \varepsilon \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

b) Nach dem Satz über Schätzer im linearen Modell ist der erwartungstreue Kleinste Quadrate Schätzer für w gegeben durch

$$\hat{w} = (A^T A)^{-1} A^T Y .$$

Da $A^T A = 3I$ mit der Identitätsmatrix I, gilt

$$\hat{w} = \frac{1}{3} A^T Y = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} Y \;=\; \frac{1}{3} \begin{pmatrix} y_1 + y_3 + y_4 \\ y_2 + y_3 - y_4 \end{pmatrix} .$$

c) Mit den beobachteten Messwerten ergibt sich

$$\hat{w}_1 = 3,1, \quad \hat{w}_2 = 2,6 .$$

Verteilungstabellen

A Normalverteilung

Verteilungsfunktion $\Phi(c) = \mathcal{N}_{0,1}(]-\infty, c]) = 1 - \Phi(-c)$ der Standardnormalverteilung. Den Wert etwa für $c = 1.16$ findet man in der Zeile 1.1 und Spalte .06: $\Phi(1.16) = 0.8770$. Das α-Quantil von $\mathcal{N}_{0,1}$ findet man, indem man den Wert α in der Tabelle lokalisiert und Zeilen- und Spaltenwert addiert: $\Phi^{-1}(0.975) = 1.96$; einige Quantile stehen auch in Tabelle C. Für große Werte von c siehe Aufgabe 5.15.

c	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

B Chiquadrat- und Gamma-Verteilungen

α-Quantile $\chi^2_{n;\alpha}$ der Chiquadrat-Verteilungen $\boldsymbol{\chi}^2_n = \Gamma_{1/2,n/2}$ mit n Freiheitsgraden. $\chi^2_{n;\alpha}$ ist der Wert $c > 0$ mit $\boldsymbol{\chi}^2_n([0,c]) = \alpha$. Durch Skalierung erhält man die Quantile der Gamma-Verteilungen $\Gamma_{\lambda,r}$ mit $\lambda > 0$ und $2r \in \mathbb{N}$. Für große n verwende man die Approximationen aus den Aufgaben 9.10 und 9.11. Notation: $^{-5}3.9 = 3.9 \cdot 10^{-5}$.

$\alpha=$	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1	0.9	0.95	0.98	0.99	0.995
$n=1$	$^{-5}3.9$	$^{-4}1.6$	$^{-4}6.3$	$^{-3}3.9$	.0158	2.706	3.841	5.412	6.635	7.879
2	.0100	.0201	.0404	.1026	.2107	4.605	5.991	7.824	9.210	10.60
3	.0717	.1148	.1848	.3518	.5844	6.251	7.815	9.837	11.34	12.84
4	.2070	.2971	.4294	.7107	1.064	7.779	9.488	11.67	13.28	14.86
5	.4117	.5543	.7519	1.145	1.610	9.236	11.07	13.39	15.09	16.75
6	.6757	.8721	1.134	1.635	2.204	10.64	12.59	15.03	16.81	18.55
7	.9893	1.239	1.564	2.167	2.833	12.02	14.07	16.62	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.032	2.733	3.490	13.36	15.51	18.17	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.532	3.325	4.168	14.68	16.92	19.68	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.059	3.940	4.865	15.99	18.31	21.16	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.609	4.575	5.578	17.28	19.68	22.62	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.178	5.226	6.304	18.55	21.03	24.05	26.22	28.30
13	3.565	4.107	4.765	5.892	7.042	19.81	22.36	25.47	27.69	29.82
14	4.075	4.660	5.368	6.571	7.790	21.06	23.68	26.87	29.14	31.32
15	4.601	5.229	5.985	7.261	8.547	22.31	25.00	28.26	30.58	32.80
16	5.142	5.812	6.614	7.962	9.312	23.54	26.30	29.63	32.00	34.27
17	5.697	6.408	7.255	8.672	10.09	24.77	27.59	31.00	33.41	35.72
18	6.265	7.015	7.906	9.390	10.86	25.99	28.87	32.35	34.81	37.16
19	6.844	7.633	8.567	10.12	11.65	27.20	30.14	33.69	36.19	38.58
20	7.434	8.260	9.237	10.85	12.44	28.41	31.41	35.02	37.57	40.00
21	8.034	8.897	9.915	11.59	13.24	29.62	32.67	36.34	38.93	41.40
22	8.643	9.542	10.60	12.34	14.04	30.81	33.92	37.66	40.29	42.80
23	9.260	10.20	11.29	13.09	14.85	32.01	35.17	38.97	41.64	44.18
24	9.886	10.86	11.99	13.85	15.66	33.20	36.42	40.27	42.98	45.56
25	10.52	11.52	12.70	14.61	16.47	34.38	37.65	41.57	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.41	15.38	17.29	35.56	38.89	42.86	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.13	16.15	18.11	36.74	40.11	44.14	46.96	49.64
28	12.46	13.56	14.85	16.93	18.94	37.92	41.34	45.42	48.28	50.99
29	13.12	14.26	15.57	17.71	19.77	39.09	42.56	46.69	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.31	18.49	20.60	40.26	43.77	47.96	50.89	53.67
35	17.19	18.51	20.03	22.47	24.80	46.06	49.80	54.24	57.34	60.27
40	20.71	22.16	23.84	26.51	29.05	51.81	55.76	60.44	63.69	66.77
45	24.31	25.90	27.72	30.61	33.35	57.51	61.66	66.56	69.96	73.17
50	27.99	29.71	31.66	34.76	37.69	63.17	67.50	72.61	76.15	79.49
55	31.73	33.57	35.66	38.96	42.06	68.80	73.31	78.62	82.29	85.75
60	35.53	37.48	39.70	43.19	46.46	74.40	79.08	84.58	88.38	91.95
70	43.28	45.44	47.89	51.74	55.33	85.53	90.53	96.39	100.4	104.2
80	51.17	53.54	56.21	60.39	64.28	96.58	101.9	108.1	112.3	116.3
90	59.20	61.75	64.63	69.13	73.29	107.6	113.1	119.6	124.1	128.3
100	67.33	70.06	73.14	77.93	82.36	118.5	124.3	131.1	135.8	140.2

C Student-Verteilungen

α-Quantile $t_{n;\alpha}$ der t-Verteilungen $\boldsymbol{t}_n$ mit n Freiheitsgraden. $t_{n;\alpha}$ ist der Wert $c > 0$ mit $\boldsymbol{t}_n(]-\infty, c]) = \alpha$. Für $n = \infty$ sind die Quantile $\lim_{n\to\infty} t_{n;\alpha} = \Phi^{-1}(\alpha)$ der Standardnormalverteilung angegeben, siehe Aufgabe 9.12.

$\alpha =$	0.9	0.95	0.96	0.975	0.98	0.99	0.995
$n=1$	3.078	6.314	7.916	12.71	15.89	31.82	63.66
2	1.886	2.920	3.320	4.303	4.849	6.965	9.925
3	1.638	2.353	2.605	3.182	3.482	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.333	2.776	2.999	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.191	2.571	2.757	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.104	2.447	2.612	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.046	2.365	2.517	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.004	2.306	2.449	2.896	3.355
9	1.383	1.833	1.973	2.262	2.398	2.821	3.250
10	1.372	1.812	1.948	2.228	2.359	2.764	3.169
11	1.363	1.796	1.928	2.201	2.328	2.718	3.106
12	1.356	1.782	1.912	2.179	2.303	2.681	3.055
13	1.350	1.771	1.899	2.160	2.282	2.650	3.012
14	1.345	1.761	1.887	2.145	2.264	2.624	2.977
15	1.341	1.753	1.878	2.131	2.249	2.602	2.947
16	1.337	1.746	1.869	2.120	2.235	2.583	2.921
17	1.333	1.740	1.862	2.110	2.224	2.567	2.898
18	1.330	1.734	1.855	2.101	2.214	2.552	2.878
19	1.328	1.729	1.850	2.093	2.205	2.539	2.861
20	1.325	1.725	1.844	2.086	2.197	2.528	2.845
21	1.323	1.721	1.840	2.080	2.189	2.518	2.831
22	1.321	1.717	1.835	2.074	2.183	2.508	2.819
23	1.319	1.714	1.832	2.069	2.177	2.500	2.807
24	1.318	1.711	1.828	2.064	2.172	2.492	2.797
25	1.316	1.708	1.825	2.060	2.167	2.485	2.787
29	1.311	1.699	1.814	2.045	2.150	2.462	2.756
34	1.307	1.691	1.805	2.032	2.136	2.441	2.728
39	1.304	1.685	1.798	2.023	2.125	2.426	2.708
49	1.299	1.677	1.788	2.010	2.110	2.405	2.680
59	1.296	1.671	1.781	2.001	2.100	2.391	2.662
69	1.294	1.667	1.777	1.995	2.093	2.382	2.649
79	1.292	1.664	1.773	1.990	2.088	2.374	2.640
89	1.291	1.662	1.771	1.987	2.084	2.369	2.632
99	1.290	1.660	1.769	1.984	2.081	2.365	2.626
149	1.287	1.655	1.763	1.976	2.072	2.352	2.609
199	1.286	1.653	1.760	1.972	2.067	2.345	2.601
299	1.284	1.650	1.757	1.968	2.063	2.339	2.592
∞	1.282	1.645	1.751	1.960	2.054	2.326	2.576

D Fisher- und Beta-Verteilungen

α-Quantile $f_{m,n;\alpha}$ der $\mathcal{F}_{m,n}$-Verteilungen mit m Freiheitsgraden im Zähler und n Freiheitsgraden im Nenner. $f_{m,n;\alpha}$ ist der Wert $c > 0$ mit $\mathcal{F}_{m,n}([0, c]) = \alpha$. Mit Hilfe von Bemerkung (9.14) bekommt man die entsprechenden Quantile der Beta-Verteilungen. Der Wert für $n = \infty$ ist der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_{m,n;\alpha} = \chi^2_{m;\alpha}/m$, vgl. Aufgabe 9.12.

95%-Quantile $f_{m,n;0.95}$

$m=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n=1$	161.	199.	216.	225.	230.	234.	237.	239.	241.	242.
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16
35	4.12	3.27	2.87	2.64	2.49	2.37	2.29	2.22	2.16	2.11
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08
45	4.06	3.20	2.81	2.58	2.42	2.31	2.22	2.15	2.10	2.05
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02	1.97
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99	1.94
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93
150	3.90	3.06	2.66	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83