

## Nachklausur „Einführung in die Statistik“

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen:

|              |  |              |  |
|--------------|--|--------------|--|
| Name:        |  | Vorname:     |  |
| Matrikelnr.: |  | Studiengang: |  |

### Wichtige Hinweise:

- Es sind keine eigenen Unterlagen, Handys, Taschenrechner u.ä. zugelassen!
- Am Ende der Klausur finden Sie einige Verteilungstabellen.
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Bitte legen Sie einen amtlichen Lichtbildausweis gut sichtbar neben Ihren Platz!
- Abgabe bis spätestens 11.00 Uhr.

Viel Erfolg!

---

Diese Felder NICHT ausfüllen:

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Summe | Note |
|---------|---|---|---|---|---|-------|------|
| Punkte  |   |   |   |   |   |       |      |

## 1. (Einige kurze Fragen)

[25 Pkt.]

Bei dieser Aufgabe brauchen Sie keine Begründungen und Erläuterungen anzugeben.

- a) Seien  $x_1, \dots, x_n$  unabhängige, identisch verteilte, reelle Beobachtungswerte. Geben Sie Plug-in-Schätzer für die folgenden Kenngrößen der zugrundeliegenden Verteilung an:
- (i) Mittelwert
  - (ii) Standardabweichung
  - (iii) Verteilungsfunktion
- b) Geben Sie kurze, aber vollständige Definitionen der folgenden Begriffe an:
- (i) Statistisches Modell
  - (ii) Statistik
  - (iii) Pivot
- c) Wir betrachten nun ein reguläres statistisches Modell mit Parametermenge  $\Theta = \mathbb{R}$  und Likelihood  $L(\theta; x) = f_\theta(x)$ . Geben Sie kurze, aber vollständige Definitionen der folgenden Begriffe an:
- (i) Suffiziente Statistik
  - (ii) Fisher-Information
- d) Geben Sie das Modell, die Nullhypothese, und die Test-Statistiken für die folgenden Hypothesentests an:
- (i) t-Test
  - (ii) Chiquadrat-Anpassungstest
- e) Geben Sie die Formel für die Dichte der a posteriori Verteilung in einem Bayesschen Modell mit Likelihood  $L(\theta; x) = f(x|\theta)$  an, wenn die a priori Verteilung absolutstetig ist mit Dichte  $f(\theta)$ .

## 2. (Schätzer und Konfidenzintervalle)

[25 Pkt.]

Es sei  $\vartheta \in \mathbb{R}$  ein unbekannter Parameter und seien  $X_i = Y_i + \vartheta$ ,  $1 \leq i \leq n$ , unabhängige reelle Zufallsvariablen, deren Realisierungen Sie beobachten können. Sie nehmen an, dass die  $Y_i$  exponentialverteilt sind mit Intensität 1.

- a) Geben Sie die Dichtefunktion  $f_\vartheta(x_i)$  der Verteilung von  $X_i$  an, und berechnen Sie den Median dieser Verteilung.
- b) Geben Sie die Likelihood-Funktion  $L(\vartheta; x_1, \dots, x_n)$  an.
- c) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für  $\vartheta$ .
- d) Erläutern Sie kurz, warum der Maximum-Likelihood-Schätzer nicht robust ist.
- e) Geben Sie einen robusten Schätzer für  $\vartheta$  an.
- f) Konstruieren Sie im Fall  $n = 1$  ein Konfidenzintervall für  $\vartheta$  zum Niveau  $e^{-3}$ .

### 3. (Tests und p-Werte)

[25 Pkt.]

Sie führen ein Experiment durch und beobachten Messwerte  $x_1, \dots, x_n > 0$ , von denen Sie annehmen, dass sie Realisierungen unabhängiger, im Intervall  $(0, \vartheta)$  mit  $\vartheta > 0$  gleichverteilter Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  sind. Sie interessieren sich nun für  $\vartheta$  und konstruieren mit der Statistik

$$T(X_1, \dots, X_n) = \max(X_1, \dots, X_n)$$

einen Test für

$$H_0 : \vartheta = 1/2 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \vartheta > 1/2 ,$$

der die Nullhypothese verwirft, wenn  $T(X_1, \dots, X_n) > c$  für einen Schwellenwert  $c > 0$ .

- a) Berechnen und skizzieren Sie die Machtfunktion des Tests.
- b) Es sei  $T(x_1, \dots, x_n) = t$  der beobachtete Wert der Statistik. Ist für das obige Testproblem der rechtsseitige oder der linksseitige  $p$ -Wert relevant? Berechnen Sie diesen.
- c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von  $n$  den kleinstmöglichen Schwellenwert für den der Test Signifikanzniveau  $\alpha \in (0, 1)$  hat.
- d) Es sei  $n = 20$  und Sie beobachten  $t = 0,475$ . Was können Sie anhand des  $p$ -Werts über die Nullhypothese  $\vartheta = 1/2$  aussagen? Was gilt entsprechend für  $t = 0,51$ ?  
*Hinweis: Sie können die Näherung  $(1 + \frac{x}{n})^n \approx e^x$  verwenden.*

#### 4. (Entropie)

[15 Pkt.]

Es sei  $S$  eine endliche Menge und  $\mu = (\mu(x))_{x \in S}$  eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf  $S$ .

- a) Definieren Sie die Entropie  $H(\mu)$  der Verteilung  $\mu$ .
- b) Geben Sie alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen an, die die Entropie minimieren bzw. maximieren.
- c) Beweisen Sie Ihre Aussage zu Aufgabenteil b).

### 5. (Regression)

[15 Pkt.]

Für zwei Objekte mit unbekanntem Gewichten  $w_1$  und  $w_2$  werden die Gewichte der Einzelobjekte, die Summe und Differenz der Gewichte gemessen. Jede der vier Messungen sei mit einem unabhängigen Fehler mit Mittelwert 0 und Varianz  $v$  behaftet.

- a) Stellen Sie für diese Situation ein lineares Modell auf.
- b) Bestimmen Sie den Kleinste-Quadrate-Schätzer für  $(w_1, w_2)^T$ .
- c) Es wurden die Messwerte 3,1, 2,6, 5,7, 0,5 beobachtet. Geben Sie den Wert des Schätzers aus Aufgabenteil b) an.

## Verteilungstabellen

### A Normalverteilung

Verteilungsfunktion  $\Phi(c) = \mathcal{N}_{0,1}([-\infty, c]) = 1 - \Phi(-c)$  der Standardnormalverteilung. Den Wert etwa für  $c = 1.16$  findet man in der Zeile 1.1 und Spalte .06:  $\Phi(1.16) = 0.8770$ . Das  $\alpha$ -Quantil von  $\mathcal{N}_{0,1}$  findet man, indem man den Wert  $\alpha$  in der Tabelle lokalisiert und Zeilen- und Spaltenwert addiert:  $\Phi^{-1}(0.975) = 1.96$ ; einige Quantile stehen auch in Tabelle C. Für große Werte von  $c$  siehe Aufgabe 5.15.

| $c$ | .00   | .01   | .02   | .03   | .04   | .05   | .06   | .07   | .08   | .09   |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.0 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| 0.1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| 0.2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| 0.3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| 0.4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| 0.5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| 0.6 | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| 0.7 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| 0.8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| 0.9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1.8 | .9641 | .9649 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| 1.9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| 2.0 | .9772 | .9778 | .9783 | .9788 | .9793 | .9798 | .9803 | .9808 | .9812 | .9817 |
| 2.1 | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857 |
| 2.2 | .9861 | .9864 | .9868 | .9871 | .9875 | .9878 | .9881 | .9884 | .9887 | .9890 |
| 2.3 | .9893 | .9896 | .9898 | .9901 | .9904 | .9906 | .9909 | .9911 | .9913 | .9916 |
| 2.4 | .9918 | .9920 | .9922 | .9925 | .9927 | .9929 | .9931 | .9932 | .9934 | .9936 |
| 2.5 | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 | .9951 | .9952 |
| 2.6 | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9959 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964 |
| 2.7 | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974 |
| 2.8 | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9979 | .9979 | .9980 | .9981 |
| 2.9 | .9981 | .9982 | .9982 | .9983 | .9984 | .9984 | .9985 | .9985 | .9986 | .9986 |
| 3.0 | .9987 | .9987 | .9987 | .9988 | .9988 | .9989 | .9989 | .9989 | .9990 | .9990 |

## B Chiquadrat- und Gamma-Verteilungen

$\alpha$ -Quantile  $\chi_{n;\alpha}^2$  der Chiquadrat-Verteilungen  $\chi_n^2 = \Gamma_{1/2,n/2}$  mit  $n$  Freiheitsgraden.  $\chi_{n;\alpha}^2$  ist der Wert  $c > 0$  mit  $\chi_n^2([0, c]) = \alpha$ . Durch Skalierung erhält man die Quantile der Gamma-Verteilungen  $\Gamma_{\lambda,r}$  mit  $\lambda > 0$  und  $2r \in \mathbb{N}$ . Für große  $n$  verwende man die Approximationen aus den Aufgaben 9.10 und 9.11. Notation:  $^{-5}3.9 = 3.9 \cdot 10^{-5}$ .

| $\alpha =$ | 0.005      | 0.01       | 0.02       | 0.05       | 0.1   | 0.9   | 0.95  | 0.98  | 0.99  | 0.995 |
|------------|------------|------------|------------|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $n=1$      | $^{-5}3.9$ | $^{-4}1.6$ | $^{-4}6.3$ | $^{-3}3.9$ | .0158 | 2.706 | 3.841 | 5.412 | 6.635 | 7.879 |
| 2          | .0100      | .0201      | .0404      | .1026      | .2107 | 4.605 | 5.991 | 7.824 | 9.210 | 10.60 |
| 3          | .0717      | .1148      | .1848      | .3518      | .5844 | 6.251 | 7.815 | 9.837 | 11.34 | 12.84 |
| 4          | .2070      | .2971      | .4294      | .7107      | 1.064 | 7.779 | 9.488 | 11.67 | 13.28 | 14.86 |
| 5          | .4117      | .5543      | .7519      | 1.145      | 1.610 | 9.236 | 11.07 | 13.39 | 15.09 | 16.75 |
| 6          | .6757      | .8721      | 1.134      | 1.635      | 2.204 | 10.64 | 12.59 | 15.03 | 16.81 | 18.55 |
| 7          | .9893      | 1.239      | 1.564      | 2.167      | 2.833 | 12.02 | 14.07 | 16.62 | 18.48 | 20.28 |
| 8          | 1.344      | 1.646      | 2.032      | 2.733      | 3.490 | 13.36 | 15.51 | 18.17 | 20.09 | 21.95 |
| 9          | 1.735      | 2.088      | 2.532      | 3.325      | 4.168 | 14.68 | 16.92 | 19.68 | 21.67 | 23.59 |
| 10         | 2.156      | 2.558      | 3.059      | 3.940      | 4.865 | 15.99 | 18.31 | 21.16 | 23.21 | 25.19 |
| 11         | 2.603      | 3.053      | 3.609      | 4.575      | 5.578 | 17.28 | 19.68 | 22.62 | 24.72 | 26.76 |
| 12         | 3.074      | 3.571      | 4.178      | 5.226      | 6.304 | 18.55 | 21.03 | 24.05 | 26.22 | 28.30 |
| 13         | 3.565      | 4.107      | 4.765      | 5.892      | 7.042 | 19.81 | 22.36 | 25.47 | 27.69 | 29.82 |
| 14         | 4.075      | 4.660      | 5.368      | 6.571      | 7.790 | 21.06 | 23.68 | 26.87 | 29.14 | 31.32 |
| 15         | 4.601      | 5.229      | 5.985      | 7.261      | 8.547 | 22.31 | 25.00 | 28.26 | 30.58 | 32.80 |
| 16         | 5.142      | 5.812      | 6.614      | 7.962      | 9.312 | 23.54 | 26.30 | 29.63 | 32.00 | 34.27 |
| 17         | 5.697      | 6.408      | 7.255      | 8.672      | 10.09 | 24.77 | 27.59 | 31.00 | 33.41 | 35.72 |
| 18         | 6.265      | 7.015      | 7.906      | 9.390      | 10.86 | 25.99 | 28.87 | 32.35 | 34.81 | 37.16 |
| 19         | 6.844      | 7.633      | 8.567      | 10.12      | 11.65 | 27.20 | 30.14 | 33.69 | 36.19 | 38.58 |
| 20         | 7.434      | 8.260      | 9.237      | 10.85      | 12.44 | 28.41 | 31.41 | 35.02 | 37.57 | 40.00 |
| 21         | 8.034      | 8.897      | 9.915      | 11.59      | 13.24 | 29.62 | 32.67 | 36.34 | 38.93 | 41.40 |
| 22         | 8.643      | 9.542      | 10.60      | 12.34      | 14.04 | 30.81 | 33.92 | 37.66 | 40.29 | 42.80 |
| 23         | 9.260      | 10.20      | 11.29      | 13.09      | 14.85 | 32.01 | 35.17 | 38.97 | 41.64 | 44.18 |
| 24         | 9.886      | 10.86      | 11.99      | 13.85      | 15.66 | 33.20 | 36.42 | 40.27 | 42.98 | 45.56 |
| 25         | 10.52      | 11.52      | 12.70      | 14.61      | 16.47 | 34.38 | 37.65 | 41.57 | 44.31 | 46.93 |
| 26         | 11.16      | 12.20      | 13.41      | 15.38      | 17.29 | 35.56 | 38.89 | 42.86 | 45.64 | 48.29 |
| 27         | 11.81      | 12.88      | 14.13      | 16.15      | 18.11 | 36.74 | 40.11 | 44.14 | 46.96 | 49.64 |
| 28         | 12.46      | 13.56      | 14.85      | 16.93      | 18.94 | 37.92 | 41.34 | 45.42 | 48.28 | 50.99 |
| 29         | 13.12      | 14.26      | 15.57      | 17.71      | 19.77 | 39.09 | 42.56 | 46.69 | 49.59 | 52.34 |
| 30         | 13.79      | 14.95      | 16.31      | 18.49      | 20.60 | 40.26 | 43.77 | 47.96 | 50.89 | 53.67 |
| 35         | 17.19      | 18.51      | 20.03      | 22.47      | 24.80 | 46.06 | 49.80 | 54.24 | 57.34 | 60.27 |
| 40         | 20.71      | 22.16      | 23.84      | 26.51      | 29.05 | 51.81 | 55.76 | 60.44 | 63.69 | 66.77 |
| 45         | 24.31      | 25.90      | 27.72      | 30.61      | 33.35 | 57.51 | 61.66 | 66.56 | 69.96 | 73.17 |
| 50         | 27.99      | 29.71      | 31.66      | 34.76      | 37.69 | 63.17 | 67.50 | 72.61 | 76.15 | 79.49 |
| 55         | 31.73      | 33.57      | 35.66      | 38.96      | 42.06 | 68.80 | 73.31 | 78.62 | 82.29 | 85.75 |
| 60         | 35.53      | 37.48      | 39.70      | 43.19      | 46.46 | 74.40 | 79.08 | 84.58 | 88.38 | 91.95 |
| 70         | 43.28      | 45.44      | 47.89      | 51.74      | 55.33 | 85.53 | 90.53 | 96.39 | 100.4 | 104.2 |
| 80         | 51.17      | 53.54      | 56.21      | 60.39      | 64.28 | 96.58 | 101.9 | 108.1 | 112.3 | 116.3 |
| 90         | 59.20      | 61.75      | 64.63      | 69.13      | 73.29 | 107.6 | 113.1 | 119.6 | 124.1 | 128.3 |
| 100        | 67.33      | 70.06      | 73.14      | 77.93      | 82.36 | 118.5 | 124.3 | 131.1 | 135.8 | 140.2 |

### C Student-Verteilungen

$\alpha$ -Quantile  $t_{n;\alpha}$  der  $t$ -Verteilungen  $t_n$  mit  $n$  Freiheitsgraden.  $t_{n;\alpha}$  ist der Wert  $c > 0$  mit  $t_n(-\infty, c] = \alpha$ . Für  $n = \infty$  sind die Quantile  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{n;\alpha} = \Phi^{-1}(\alpha)$  der Standardnormalverteilung angegeben, siehe Aufgabe 9.12.

| $\alpha =$ | 0.9   | 0.95  | 0.96  | 0.975 | 0.98  | 0.99  | 0.995 |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $n=1$      | 3.078 | 6.314 | 7.916 | 12.71 | 15.89 | 31.82 | 63.66 |
| 2          | 1.886 | 2.920 | 3.320 | 4.303 | 4.849 | 6.965 | 9.925 |
| 3          | 1.638 | 2.353 | 2.605 | 3.182 | 3.482 | 4.541 | 5.841 |
| 4          | 1.533 | 2.132 | 2.333 | 2.776 | 2.999 | 3.747 | 4.604 |
| 5          | 1.476 | 2.015 | 2.191 | 2.571 | 2.757 | 3.365 | 4.032 |
| 6          | 1.440 | 1.943 | 2.104 | 2.447 | 2.612 | 3.143 | 3.707 |
| 7          | 1.415 | 1.895 | 2.046 | 2.365 | 2.517 | 2.998 | 3.499 |
| 8          | 1.397 | 1.860 | 2.004 | 2.306 | 2.449 | 2.896 | 3.355 |
| 9          | 1.383 | 1.833 | 1.973 | 2.262 | 2.398 | 2.821 | 3.250 |
| 10         | 1.372 | 1.812 | 1.948 | 2.228 | 2.359 | 2.764 | 3.169 |
| 11         | 1.363 | 1.796 | 1.928 | 2.201 | 2.328 | 2.718 | 3.106 |
| 12         | 1.356 | 1.782 | 1.912 | 2.179 | 2.303 | 2.681 | 3.055 |
| 13         | 1.350 | 1.771 | 1.899 | 2.160 | 2.282 | 2.650 | 3.012 |
| 14         | 1.345 | 1.761 | 1.887 | 2.145 | 2.264 | 2.624 | 2.977 |
| 15         | 1.341 | 1.753 | 1.878 | 2.131 | 2.249 | 2.602 | 2.947 |
| 16         | 1.337 | 1.746 | 1.869 | 2.120 | 2.235 | 2.583 | 2.921 |
| 17         | 1.333 | 1.740 | 1.862 | 2.110 | 2.224 | 2.567 | 2.898 |
| 18         | 1.330 | 1.734 | 1.855 | 2.101 | 2.214 | 2.552 | 2.878 |
| 19         | 1.328 | 1.729 | 1.850 | 2.093 | 2.205 | 2.539 | 2.861 |
| 20         | 1.325 | 1.725 | 1.844 | 2.086 | 2.197 | 2.528 | 2.845 |
| 21         | 1.323 | 1.721 | 1.840 | 2.080 | 2.189 | 2.518 | 2.831 |
| 22         | 1.321 | 1.717 | 1.835 | 2.074 | 2.183 | 2.508 | 2.819 |
| 23         | 1.319 | 1.714 | 1.832 | 2.069 | 2.177 | 2.500 | 2.807 |
| 24         | 1.318 | 1.711 | 1.828 | 2.064 | 2.172 | 2.492 | 2.797 |
| 25         | 1.316 | 1.708 | 1.825 | 2.060 | 2.167 | 2.485 | 2.787 |
| 29         | 1.311 | 1.699 | 1.814 | 2.045 | 2.150 | 2.462 | 2.756 |
| 34         | 1.307 | 1.691 | 1.805 | 2.032 | 2.136 | 2.441 | 2.728 |
| 39         | 1.304 | 1.685 | 1.798 | 2.023 | 2.125 | 2.426 | 2.708 |
| 49         | 1.299 | 1.677 | 1.788 | 2.010 | 2.110 | 2.405 | 2.680 |
| 59         | 1.296 | 1.671 | 1.781 | 2.001 | 2.100 | 2.391 | 2.662 |
| 69         | 1.294 | 1.667 | 1.777 | 1.995 | 2.093 | 2.382 | 2.649 |
| 79         | 1.292 | 1.664 | 1.773 | 1.990 | 2.088 | 2.374 | 2.640 |
| 89         | 1.291 | 1.662 | 1.771 | 1.987 | 2.084 | 2.369 | 2.632 |
| 99         | 1.290 | 1.660 | 1.769 | 1.984 | 2.081 | 2.365 | 2.626 |
| 149        | 1.287 | 1.655 | 1.763 | 1.976 | 2.072 | 2.352 | 2.609 |
| 199        | 1.286 | 1.653 | 1.760 | 1.972 | 2.067 | 2.345 | 2.601 |
| 299        | 1.284 | 1.650 | 1.757 | 1.968 | 2.063 | 2.339 | 2.592 |
| $\infty$   | 1.282 | 1.645 | 1.751 | 1.960 | 2.054 | 2.326 | 2.576 |

### D Fisher- und Beta-Verteilungen

$\alpha$ -Quantile  $f_{m,n;\alpha}$  der  $\mathcal{F}_{m,n}$ -Verteilungen mit  $m$  Freiheitsgraden im Zähler und  $n$  Freiheitsgraden im Nenner.  $f_{m,n;\alpha}$  ist der Wert  $c > 0$  mit  $\mathcal{F}_{m,n}([0, c]) = \alpha$ . Mit Hilfe von Bemerkung (9.14) bekommt man die entsprechenden Quantile der Beta-Verteilungen. Der Wert für  $n = \infty$  ist der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{m,n;\alpha} = \chi_{m;\alpha}^2/m$ , vgl. Aufgabe 9.12.

#### 95%-Quantile $f_{m,n;0.95}$

| $m =$    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $n = 1$  | 161. | 199. | 216. | 225. | 230. | 234. | 237. | 239. | 241. | 242. |
| 2        | 18.5 | 19.0 | 19.2 | 19.2 | 19.3 | 19.3 | 19.4 | 19.4 | 19.4 | 19.4 |
| 3        | 10.1 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.01 | 8.94 | 8.89 | 8.85 | 8.81 | 8.79 |
| 4        | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 | 5.96 |
| 5        | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.77 | 4.74 |
| 6        | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.10 | 4.06 |
| 7        | 5.59 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 | 3.64 |
| 8        | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.39 | 3.35 |
| 9        | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 | 3.14 |
| 10       | 4.96 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 | 2.98 |
| 11       | 4.84 | 3.98 | 3.59 | 3.36 | 3.20 | 3.09 | 3.01 | 2.95 | 2.90 | 2.85 |
| 12       | 4.75 | 3.89 | 3.49 | 3.26 | 3.11 | 3.00 | 2.91 | 2.85 | 2.80 | 2.75 |
| 13       | 4.67 | 3.81 | 3.41 | 3.18 | 3.03 | 2.92 | 2.83 | 2.77 | 2.71 | 2.67 |
| 14       | 4.60 | 3.74 | 3.34 | 3.11 | 2.96 | 2.85 | 2.76 | 2.70 | 2.65 | 2.60 |
| 15       | 4.54 | 3.68 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.59 | 2.54 |
| 16       | 4.49 | 3.63 | 3.24 | 3.01 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.59 | 2.54 | 2.49 |
| 17       | 4.45 | 3.59 | 3.20 | 2.96 | 2.81 | 2.70 | 2.61 | 2.55 | 2.49 | 2.45 |
| 18       | 4.41 | 3.55 | 3.16 | 2.93 | 2.77 | 2.66 | 2.58 | 2.51 | 2.46 | 2.41 |
| 19       | 4.38 | 3.52 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.63 | 2.54 | 2.48 | 2.42 | 2.38 |
| 20       | 4.35 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.51 | 2.45 | 2.39 | 2.35 |
| 21       | 4.32 | 3.47 | 3.07 | 2.84 | 2.68 | 2.57 | 2.49 | 2.42 | 2.37 | 2.32 |
| 22       | 4.30 | 3.44 | 3.05 | 2.82 | 2.66 | 2.55 | 2.46 | 2.40 | 2.34 | 2.30 |
| 23       | 4.28 | 3.42 | 3.03 | 2.80 | 2.64 | 2.53 | 2.44 | 2.37 | 2.32 | 2.27 |
| 24       | 4.26 | 3.40 | 3.01 | 2.78 | 2.62 | 2.51 | 2.42 | 2.36 | 2.30 | 2.25 |
| 25       | 4.24 | 3.39 | 2.99 | 2.76 | 2.60 | 2.49 | 2.40 | 2.34 | 2.28 | 2.24 |
| 26       | 4.23 | 3.37 | 2.98 | 2.74 | 2.59 | 2.47 | 2.39 | 2.32 | 2.27 | 2.22 |
| 27       | 4.21 | 3.35 | 2.96 | 2.73 | 2.57 | 2.46 | 2.37 | 2.31 | 2.25 | 2.20 |
| 28       | 4.20 | 3.34 | 2.95 | 2.71 | 2.56 | 2.45 | 2.36 | 2.29 | 2.24 | 2.19 |
| 29       | 4.18 | 3.33 | 2.93 | 2.70 | 2.55 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.22 | 2.18 |
| 30       | 4.17 | 3.32 | 2.92 | 2.69 | 2.53 | 2.42 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.16 |
| 35       | 4.12 | 3.27 | 2.87 | 2.64 | 2.49 | 2.37 | 2.29 | 2.22 | 2.16 | 2.11 |
| 40       | 4.08 | 3.23 | 2.84 | 2.61 | 2.45 | 2.34 | 2.25 | 2.18 | 2.12 | 2.08 |
| 45       | 4.06 | 3.20 | 2.81 | 2.58 | 2.42 | 2.31 | 2.22 | 2.15 | 2.10 | 2.05 |
| 50       | 4.03 | 3.18 | 2.79 | 2.56 | 2.40 | 2.29 | 2.20 | 2.13 | 2.07 | 2.03 |
| 60       | 4.00 | 3.15 | 2.76 | 2.53 | 2.37 | 2.25 | 2.17 | 2.10 | 2.04 | 1.99 |
| 70       | 3.98 | 3.13 | 2.74 | 2.50 | 2.35 | 2.23 | 2.14 | 2.07 | 2.02 | 1.97 |
| 80       | 3.96 | 3.11 | 2.72 | 2.49 | 2.33 | 2.21 | 2.13 | 2.06 | 2.00 | 1.95 |
| 90       | 3.95 | 3.10 | 2.71 | 2.47 | 2.32 | 2.20 | 2.11 | 2.04 | 1.99 | 1.94 |
| 100      | 3.94 | 3.09 | 2.70 | 2.46 | 2.31 | 2.19 | 2.10 | 2.03 | 1.97 | 1.93 |
| 150      | 3.90 | 3.06 | 2.66 | 2.43 | 2.27 | 2.16 | 2.07 | 2.00 | 1.94 | 1.89 |
| 200      | 3.89 | 3.04 | 2.65 | 2.42 | 2.26 | 2.14 | 2.06 | 1.98 | 1.93 | 1.88 |
| $\infty$ | 3.84 | 3.00 | 2.60 | 2.37 | 2.21 | 2.10 | 2.01 | 1.94 | 1.88 | 1.83 |