Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2024
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

Klausur „Einführung in die Statistik"

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen:

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Studiengang:	

Wichtige Hinweise:

- **Es sind keine eigenen Unterlagen, Smartphones, Taschenrechner u.ä. zugelassen!**
- **Am Ende der Klausur finden Sie einige Verteilungstabellen.**
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Bitte legen Sie einen amtlichen Lichtbildausweis gut sichtbar neben Ihren Platz!
- Abgabe bis spätestens 11.00 Uhr.

Viel Erfolg!

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	**Summe**	**Note**
Punkte							

1. (Einige kurze Fragen) *[22 Pkt.]*

a) Gegeben sei ein parametrisches Modell $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}, X)$. Wir betrachten einen Hypothesentest für die Nullhypothese $\theta = \theta_0$ mit Verwerfungsregel $\varphi(X) = 1_{\{T(X)\geq c\}}$.

   (i) Sei $\alpha \in (0, 1)$. Was bedeutet es, dass der Test das Signifikanzniveau α hat?

   (ii) Wie ist die Machtfunktion des Tests definiert?

   (iii) Sei x der beobachtete Stichprobenwert. Wie ist der rechtsseitige p-Wert definiert?

   (iv) Formulieren Sie mithilfe des rechtsseitigen p-Werts die Entscheidungsregel eines Tests mit Signifikanzniveau α.

b) Seien Z_i $(i \in \mathbb{N})$ unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Geben Sie Zufallsvariablen mit den folgenden Verteilungen an:

   (i) χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden,

   (ii) Studentsche t-Verteilung mit n Freiheitsgraden,

   (iii) Fisher-Verteilung mit Freiheitsgraden n und m.

c) Seien $X_1, \dots, X_n$ reelle Beobachtungswerte. Definieren Sie die folgenden Statistiken, und geben Sie (ohne Beweis) die asymptotischen Bruchpunkte an:

   (i) Spannweite,

   (ii) getrimmter Mittelwert mit Parameter $\tau \in (0, 1/2)$.

d) Seien $p, q \in (0, 1)$. Geben Sie die relative Entropie $H(\text{Bernoulli}(p)|\text{Bernoulli}(q))$ an.

Lösung:

a) (i) Der Test hat Signifikanzniveau α, falls $\mathbb{P}_{\vartheta_0}(T(X) \geq c) = \mathbb{E}_{\vartheta_0}\varphi(X) \leq \alpha$.

   (ii) Die Machtfunktion ist $\beta(\vartheta) = \mathbb{E}_\vartheta\varphi(X)$.

   (iii) Der rechtsseitige p-Wert ist $p_r(x) = \mathbb{P}_{\vartheta_0}(X \geq x)$.

   (iv) Der Test mit Verwerfungregel $\varphi(X) = 1_{p_r(X)\leq\alpha}$ zum obigen Testproblem hat Signifikanzniveau α.

b) (i)

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \, ,$$

   (ii)

$$\frac{Z_{n+1}}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2}} \, ,$$

   (iii)

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2}{\frac{1}{m}\sum_{i=n+1}^{n+m} Z_i^2} \, .$$

c) (i) Die Spannweite ist $X_{(n)} - X_{(1)}$ und hat asymptotischen Bruchpunkt 0.

(ii) Der getrimmte Mittelwert mit Parameter $\tau \in (0, 1/2)$ ist

$$\frac{1}{n - 2\lfloor \tau n \rfloor} \sum_{i=\lfloor \tau n \rfloor + 1}^{n - \lfloor \tau n \rfloor} X_{(i)}$$

und hat asymptotischen Bruchpunkt τ.

d) Es gilt

$$H(\text{Bernoulli}(p)|\text{Bernoulli}(q)) \;=\; p \log\left(\frac{p}{q}\right) + (1-p)\log\left(\frac{1-p}{1-q}\right) \;.$$

2. (Vergleich zweier Medikamente) *[30 Pkt.]*

200 Patienten mit einer bakteriellen Infektion werden zufällig in zwei gleich große Gruppen unterteilt. Die erste Gruppe bekommt ein bereits zugelassenes Antibiotikum verabreicht, während die zweite Gruppe ein neuartiges Antibiotikum erhält. In der ersten Gruppe ist die Behandlung bei 90 Patienten erfolgreich, in der zweiten Gruppe bei 80. Seien p und q die Erfolgswahrscheinlichkeiten unter dem bereits zugelassenen und dem neuartigen Medikament.

a) Geben Sie ein geeignetes statistisches Modell an.

b) Geben Sie den plug-in Schätzer für $p - q$ an. Welchen Wert hat der Schätzer in der obigen Situation?

c) Ist dieser Schätzer erwartungstreu? (mit Begründung)

d) Zeigen Sie, dass der Schätzer die Varianz $\frac{p(1-p)+q(1-q)}{100}$ hat, und berechnen Sie einen Schätzwert für die Standardabweichung des Schätzers.

e) Berechnen Sie ein approximatives Konfidenzintervall zum Niveau 95%.

f) Können Sie die Nullhypothese $H_0 : p = q$ zum Signifikanzniveau 5% verwerfen? (mit kurzer Begründung)

Lösung:

a) *Variante 1:* $X_1, \ldots, X_{100} \sim \text{Bernoulli}(p)$, $Y_1, \ldots, Y_{100} \sim \text{Bernoulli}(q)$ alle unabhängig.
Variante 2:

$$\big(\Omega, \mathcal{A}, (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta}, (X, Y)\big) ,$$

wobei

- $\Omega = \{0,1\}^{200}$,
- $\vartheta = (p, q) \in [0,1]^2 = \Theta$,
- $\mathbb{P}_{p,q} = \text{Bernoulli}(p)^{\otimes 100} \otimes \text{Bernoulli}(q)^{\otimes 100}$,
- $(X, Y)(\omega) = (X_1, \ldots, X_{100}, Y_1, \ldots, Y_{100})(\omega) = \omega$.

b) Der plug-in Schätzer für $p - q$ ist

$$\hat{p} - \hat{q} \;=\; \bar{X} - \bar{Y} \;=\; \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (X_i - Y_i)$$

und nimmt den Wert $\frac{90}{100} - \frac{80}{100} = \frac{1}{10}$ an.

c) Der Schätzer ist erwartungstreu, da

$$\mathbb{E}_{p,q}(\bar{X} - \bar{Y}) \;=\; \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\mathbb{E}_{p,q} X_i - \mathbb{E}_{p,q} Y_i) \;=\; p - q \,.$$

d) Da $\mathrm{Var}_{p,q}X_i = p(1-p)$ und $\mathrm{Var}_{p,q}Y_i = q(1-q)$, gilt aufgrund der Unabhängigkeit

$$\mathrm{Var}_{p,q}(\bar{X} - \bar{Y}) \;=\; \frac{1}{100^2}\sum_{i=1}^{100}(\mathrm{Var}_{p,q}X_i + \mathrm{Var}_{p,q}Y_i) \;=\; \frac{p(1-p)+q(1-q)}{100}\,.$$

Einen Schätzwert für die Standardabweichung erhalten wir, indem wir die Schätzwerte $\hat{p} = 9/10$ und $\hat{q} = 8/10$ einsetzen:

$$\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})+\hat{q}(1-\hat{q})}{100}} \;=\; \frac{\sqrt{25/100}}{10} \;=\; \frac{1}{20}\,.$$

e) Es gilt

$$\begin{aligned}
\hat{p} - \hat{q} \;&=\; \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}(X_i - Y_i) \;=\; p - q + \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}(X_i - Y_i - \mathbb{E}_{p,q}(X_i - Y_i)) \\
&=\; p - q + \sqrt{\frac{p(1-p)+q(1-q)}{100}}\,\frac{1}{\sqrt{100}}\sum_{i=1}^{100}\frac{X_i - Y_i - \mathbb{E}_{p,q}(X_i - Y_i)}{\mathrm{Var}_{p,q}(X_i - Y_i)^{1/2}}\,.
\end{aligned}$$

Nach dem zentralen Grenzwertsatz konvergiert für $n \to \infty$ in Verteilung

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i - Y_i - \mathbb{E}_{p,q}(X_i - Y_i)}{\mathrm{Var}_{p,q}(X_i - Y_i)^{1/2}} \;\to\; \mathcal{N}(0,1)\,.$$

Mit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ können wir also schreiben

$$p - q \;\approx\; \hat{p} - \hat{q} + \sqrt{\frac{p(1-p)+q(1-q)}{100}}Z \;\approx\; \frac{1}{10} + \frac{Z}{20}\,,$$

wobei wir die Schätzwerte aus b) und d) eingesetzt haben. Ein approximatives 95% Konfidenzintervall erhalten wir für $c > 0$ durch

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(p - q \in \left[\frac{1}{10} - \frac{c}{20}, \frac{1}{10} + \frac{c}{20}\right]\right) \;&=\; \mathbb{P}\left(20\left(p - q - \frac{1}{10}\right) \in [-c, c]\right) \\
&\approx\; \mathbb{P}(Z \in [-c, c]) \;=\; 1 - 2(1 - \Phi(c)) \\
&\geq\; 0.95\,,
\end{aligned}$$

was genau dann gilt, wenn $\Phi(c) \geq 1 - 0.025 = 0.975$, also laut Verteilungstabelle A für $c \geq 1,96$. Also ist

$$C \;=\; \left[\frac{1}{10} - \frac{1,96}{20}, \frac{1}{10} + \frac{1,96}{20}\right]$$

ein approximatives 95% Konfidenzintervall für $p - q$.

f) Aufgrund der Dualität von Hypothesentests und Konfidenzbereichen, hat der Test mit Verwerfungsbereich C^c ungefähr Niveau 5%. Da unter der Nullhypothese $p = q$ gilt $p - q = 0 \notin C$, können wir die Nullhypothese zum Niveau 5% verwerfen.

3. (Likelihood) *[22 Pkt.]*

Sie führen ein Experiment durch und beobachten Messwerte $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, von denen Sie annehmen, dass sie Realisierungen unabhängiger, normalverteilter Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit Mittelwert m und Varianz v sind.

a) Geben Sie die Likelihood-Funktion an.

b) Bestimmen Sie Maximum-Likelihood-Schätzer für:

(i) den Mittelwert bei bekannter Varianz,

(ii) die Varianz bei bekanntem Mittelwert,

(iii) Mittelwert und Varianz.

c) Geben Sie die Definition einer für den Parameter $\theta = (m, v)$ suffizienten Statistik an. Ist die Statistik aus b) (iii) suffizient? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

a)

$$L(m, v; x_1, \ldots, x_n) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x_i - m)^2}{2v}}$$

b) Die Log-Likelihood ist

$$\begin{aligned} l(m, v; x_1, \ldots, x_n) \;&=\; -\frac{n}{2}\log(2\pi v) - \frac{1}{2v}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 \\ &=\; -\frac{n}{2}\log(2\pi v) - \frac{1}{2v}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2 - \frac{n}{2v}(\bar{x}_n - m)^2 \;, \end{aligned}$$

wobei $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

(i) Es ist

$$\frac{\partial}{\partial m} l \;=\; \frac{n}{v}(\bar{x}_n - m) \;=\; 0$$

g.d.w $m = \bar{x}_n$. Die log-Likelihood ist an dieser Stelle maximal, da ihre Ableitung für kleinere m positiv und für größere m negativ ist. Daher ist der MLE

$$\hat{M} \;=\; \bar{X}_n \;.$$

(ii) Da

$$\frac{\partial}{\partial v} l \;=\; \frac{n}{2v^2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 - v\right) \;=\; 0 \;,$$

g.d.w. $v = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2$ und $\frac{\partial}{\partial v} l$ für kleinere v positiv and für größere v negativ ist, ist

$$\hat{V} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$$

der MLE.

(iii) Da

$$\nabla_{(m,v)} l \;=\; \begin{pmatrix} \frac{n}{v}(\bar{x}_n - m) \\ \frac{n}{2v^2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 - v\right) + \frac{n}{2v^2}(\bar{x}_n - m)^2 \end{pmatrix} \;=\; 0$$

g.d.w. $(m, v) = (\bar{x}_n, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2)$ und

$$\nabla^2_{(m,v)} l \;=\; \begin{pmatrix} -\frac{n}{v} & -\frac{n}{v^2}(\bar{x}_n - m) \\ -\frac{n}{v^2}(\bar{x}_n - m) & -\frac{n}{v^3}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 - v\right) - \frac{n}{2v^2} - \frac{n}{v^3}(\bar{x}_n - m)^2 \end{pmatrix}$$

an dieser Stelle

$$\begin{pmatrix} -\frac{n}{v} & 0 \\ 0 & -\frac{n}{2v^2} \end{pmatrix}$$

und damit negativ definit ist, ist die log-Likelihood in diesem Punkt maximal und

$$\hat{\theta} \;=\; \left(\bar{X}_n,\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2\right)$$

ist der MLE für $\theta = (m, v)$.

c) Eine Statistik $T(X)$ ist suffizient für den Parameter $\theta = (m, v)$, falls sich die Likelihood in der Form

$$L(m, v; x) \;=\; g_{m,v}(T(x))h(x)$$

mit messbaren $g_{m,v} : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ und $h : S \to [0, \infty)$ schreiben lässt.

Die Statistik aus b) (iii) ist suffizient für $\theta = (m, v)$, da die Definition mit

$$g_{m,v} \;=\; \exp(l(m, v;\, \cdot\,))$$

und $h = 1$ erfüllt ist.

4. (Quantile und Boxplots) *[22 Pkt.]*

Seien $X_1, \dots X_n$ unabhängige reelle Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F.

a) Sei $\alpha \in (0,1)$. Formulieren Sie mithilfe der Verteilungsfunktion eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $q_\alpha \in \mathbb{R}$ ein α-Quantil der zugrundeliegenden Verteilung ist.

b) Beschreiben Sie anhand einer Skizze, was in einem Boxplot der Werte $X_1, \dots, X_n$ dargestellt ist.

c) Es gelte $n/4 \notin \mathbb{N}$ und F sei stetig. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}[q_{1/2} \in (\hat{q}_{1/4}, \hat{q}_{3/4})] \;=\; \sum_{j=\lfloor n/4 \rfloor+1}^{\lfloor 3n/4 \rfloor} \binom{n}{j} 2^{-n} \,.$$

d) Geben Sie anhand des folgenden Datensatzes ein Konfidenzintervall zum Niveau 98% für den Median der Lebensdauer in Monaten von Schäferhunden an.

108	110	115	121	123	126	129	131	132	135	137
138	141	143	147	150	151	152	156	159	160	165

Dazu steht Ihnen die folgende Verteilungstabelle der Binomialverteilung zur Verfügung.

x	$F_{22,1/2}(x)$	x	$F_{22,1/2}(x)$	x	$F_{22,1/2}(x)$	x	$F_{22,1/2}(x)$
0	$0,000$	6	$0,026$	12	$0,738$	18	$1,000$
1	$0,000$	7	$0,067$	13	$0,857$	19	$1,000$
2	$0,000$	8	$0,143$	14	$0,933$	20	$1,000$
3	$0,002$	9	$0,262$	15	$0,974$	21	$1,000$
4	$0,006$	10	$0,416$	16	$0,992$	22	$1,000$
5	$0,008$	11	$0,584$	17	$1,000$		

Lösung:

a) $q_\alpha \in \mathbb{R}$ ist ein α-Quantil, falls $F(q_\alpha) \geq \alpha$ und $F(q_\alpha -) \leq \alpha$.

b) Siehe Skizze.

c) Da $n/4 \notin \mathbb{N}$, ist $\hat{q}_{1/4} = X_{(\lceil n/4 \rceil)}$ und $\hat{q}_{3/4} = X_{(\lceil 3n/4 \rceil)}$. Folglich ist

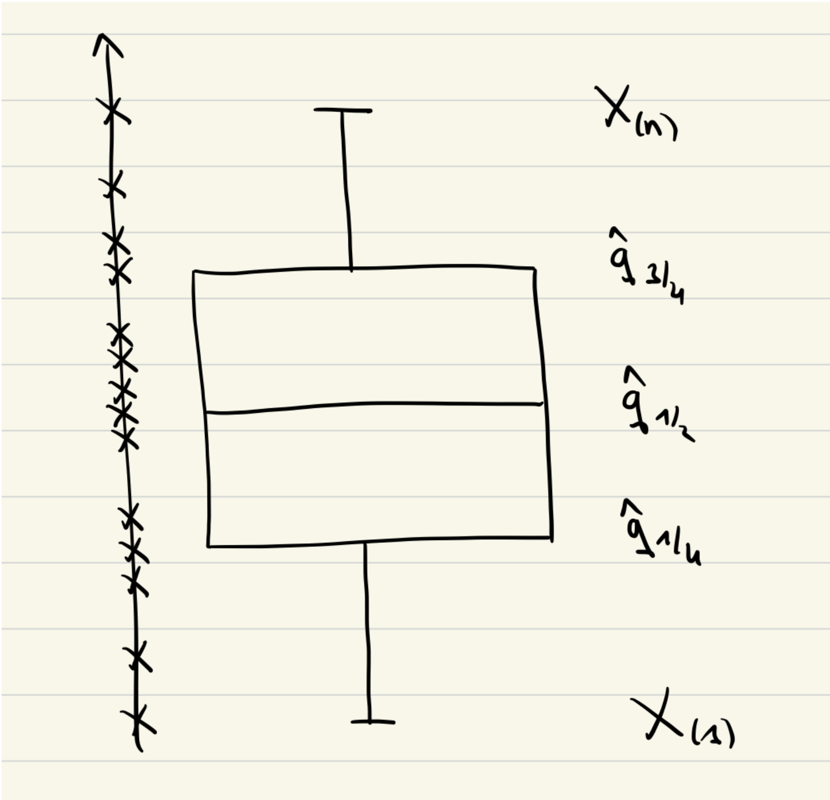
$$\mathbb{P}(q_{1/2} \in (\hat{q}_{1/4}, \hat{q}_{3/4})) \;=\; \mathbb{P}(X_{(\lceil n/4 \rceil)} < q_{1/2} < X_{(\lceil 3n/4 \rceil)})$$

die Wahrscheinlichkeit, dass zugleich mindestes $\lceil n/4 \rceil$ der X_i unterhalb und mindestens $n - (\lceil 3n/4 \rceil - 1)$ oberhalb von $q_{1/2}$ liegen. Da aufgrund der Stetigkeit der Verteilungsfunktion für alle i,

$$\mathbb{P}(X_i < q_{1/2}) \;=\; F(q_{1/2}) \;=\; 1/2 \;=\; \mathbb{P}(X_i > q_{1/2})$$

und die X_i unabhängig sind, entspricht dies

$$\sum_{j=\lceil n/4 \rceil}^{\lceil 3n/4 \rceil - 1} \binom{n}{j} (1/2)^n \,.$$



d) Mit der Verteilungsfunktion der Bin$(n, 1/2)$-Verteilung können wir das Ergebnis aus c) schreiben als

$$\mathbb{P}[q_{1/2} \in (\hat{q}_{1/4}, \hat{q}_{3/4})] \;=\; \sum_{j=\lceil n/4\rceil}^{\lceil 3n/4\rceil - 1} \binom{n}{j} 2^{-n} \;=\; F_{n,1/2}(\lceil 3n/4\rceil - 1) - F_{n,1/2}(\lceil n/4\rceil - 1)\;.$$

Da $n = 22$ nicht durch 4 teilbar ist, gilt

$$(\hat{q}_{1/4}, \hat{q}_{3/4}) \;=\; (X_{(\lceil 22/4\rceil)}, X_{(\lceil 3\cdot 22/4\rceil)}) \;=\; (X_{(6)}, X_{(17)}) \;=\; (126, 151)\;.$$

Mit den Werten aus der Verteilungstabelle ergibt sich damit

$$\mathbb{P}(q_{1/2} \in (126, 151)) \;=\; F_{22,1/2}(17-1) - F_{n,1/2}(6-1) \;=\; 0,992 - 0,008 \;=\; 0,984\;.$$

5. (Korrelation und Bootstrap) *[12 Pkt.]*

Sei μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{R}^2$.

a) Wie ist der Korrelationskoeffizient ρ zweier Zufallvariablen X, Y mit gemeinsamer Verteilung μ definiert?

b) Seien $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ unabhängige Stichproben von μ. Geben Sie den plug-in Schätzer $\hat{\rho}$ für ρ an.

c) Geben Sie in Pseudocode das Bootstrap-Verfahren zur Schätzung der Varianz von $\hat{\rho}$ an.

Lösung:

a) Der Korrelationskoeffizient ist

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$$

bzw.

$$\rho = \frac{\int \left(x - \int x'\mu(dx'dy')\right)\left(y - \int y'\mu(dx'dy')\right)\mu(dxdy)}{\left(\int (x - \int x'\mu(dx'dy'))^2\mu(dxdy)\right)^{1/2}\left(\int (y - \int y'\mu(dx'dy'))^2\mu(dxdy)\right)^{1/2}}$$

b) Der plug-in Schätzer ist

$$\hat{\rho}\big((X_1,Y_1),\dots,(X_n,Y_n)\big) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n)}{\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2\right)^{1/2}},$$

wobei $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ und $\bar{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$.

c) Das Bootstrap-Verfahren zur Schätzung der Varianz von $\hat{\rho}$ verfährt wie folgt:

<u>`Input:`</u> $(X_1, Y_1), \dots (X_n, Y_n)$, `Anzahl Bootstrap-Replikationen` B.

<u>`Für`</u> $b = 1$ `bis` B:

`Ziehe` $I_1, \dots, I_n \sim \mathrm{Unif}(\{1,\dots,n\})$ `unabhängig und setze`

$$(X_1^{(b)}, Y_1^{(b)}), \dots, (X_n^{(b)}, Y_n^{(b)}) = (X_{I_1}, Y_{I_1}), \dots, (X_{I_n}, Y_{I_n}).$$

`Berechne` $\hat{\rho}^{(b)} = \hat{\rho}\big((X_1^{(b)}, Y_1^{(b)}), \dots, (X_n^{(b)}, Y_n^{(b)})\big)$.

`Berechne`

$$V_B = \frac{1}{B-1}\sum_{b=1}^{B}\left(\hat{\rho}^{(b)} - \frac{1}{B}\sum_{r=1}^{B}\hat{\rho}^{(r)}\right)^2.$$

<u>`Output:`</u> V_B.

Verteilungstabellen

A Normalverteilung

Verteilungsfunktion $\Phi(c) = \mathcal{N}_{0,1}(]-\infty, c]) = 1 - \Phi(-c)$ der Standardnormalverteilung. Den Wert etwa für $c = 1.16$ findet man in der Zeile 1.1 und Spalte .06: $\Phi(1.16) = 0.8770$. Das α-Quantil von $\mathcal{N}_{0,1}$ findet man, indem man den Wert α in der Tabelle lokalisiert und Zeilen- und Spaltenwert addiert: $\Phi^{-1}(0.975) = 1.96$; einige Quantile stehen auch in Tabelle C. Für große Werte von c siehe Aufgabe 5.15.

c	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

B Chiquadrat- und Gamma-Verteilungen

α-Quantile $\chi^2_{n;\alpha}$ der Chiquadrat-Verteilungen $\boldsymbol{\chi}^2_n = \Gamma_{1/2,n/2}$ mit n Freiheitsgraden. $\chi^2_{n;\alpha}$ ist der Wert $c > 0$ mit $\boldsymbol{\chi}^2_n([0,c]) = \alpha$. Durch Skalierung erhält man die Quantile der Gamma-Verteilungen $\Gamma_{\lambda,r}$ mit $\lambda > 0$ und $2r \in \mathbb{N}$. Für große n verwende man die Approximationen aus den Aufgaben 9.10 und 9.11. Notation: $^{-5}3.9 = 3.9 \cdot 10^{-5}$.

$\alpha =$	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1	0.9	0.95	0.98	0.99	0.995
$n = 1$	$^{-5}3.9$	$^{-4}1.6$	$^{-4}6.3$	$^{-3}3.9$	.0158	2.706	3.841	5.412	6.635	7.879
2	.0100	.0201	.0404	.1026	.2107	4.605	5.991	7.824	9.210	10.60
3	.0717	.1148	.1848	.3518	.5844	6.251	7.815	9.837	11.34	12.84
4	.2070	.2971	.4294	.7107	1.064	7.779	9.488	11.67	13.28	14.86
5	.4117	.5543	.7519	1.145	1.610	9.236	11.07	13.39	15.09	16.75
6	.6757	.8721	1.134	1.635	2.204	10.64	12.59	15.03	16.81	18.55
7	.9893	1.239	1.564	2.167	2.833	12.02	14.07	16.62	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.032	2.733	3.490	13.36	15.51	18.17	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.532	3.325	4.168	14.68	16.92	19.68	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.059	3.940	4.865	15.99	18.31	21.16	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.609	4.575	5.578	17.28	19.68	22.62	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.178	5.226	6.304	18.55	21.03	24.05	26.22	28.30
13	3.565	4.107	4.765	5.892	7.042	19.81	22.36	25.47	27.69	29.82
14	4.075	4.660	5.368	6.571	7.790	21.06	23.68	26.87	29.14	31.32
15	4.601	5.229	5.985	7.261	8.547	22.31	25.00	28.26	30.58	32.80
16	5.142	5.812	6.614	7.962	9.312	23.54	26.30	29.63	32.00	34.27
17	5.697	6.408	7.255	8.672	10.09	24.77	27.59	31.00	33.41	35.72
18	6.265	7.015	7.906	9.390	10.86	25.99	28.87	32.35	34.81	37.16
19	6.844	7.633	8.567	10.12	11.65	27.20	30.14	33.69	36.19	38.58
20	7.434	8.260	9.237	10.85	12.44	28.41	31.41	35.02	37.57	40.00
21	8.034	8.897	9.915	11.59	13.24	29.62	32.67	36.34	38.93	41.40
22	8.643	9.542	10.60	12.34	14.04	30.81	33.92	37.66	40.29	42.80
23	9.260	10.20	11.29	13.09	14.85	32.01	35.17	38.97	41.64	44.18
24	9.886	10.86	11.99	13.85	15.66	33.20	36.42	40.27	42.98	45.56
25	10.52	11.52	12.70	14.61	16.47	34.38	37.65	41.57	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.41	15.38	17.29	35.56	38.89	42.86	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.13	16.15	18.11	36.74	40.11	44.14	46.96	49.64
28	12.46	13.56	14.85	16.93	18.94	37.92	41.34	45.42	48.28	50.99
29	13.12	14.26	15.57	17.71	19.77	39.09	42.56	46.69	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.31	18.49	20.60	40.26	43.77	47.96	50.89	53.67
35	17.19	18.51	20.03	22.47	24.80	46.06	49.80	54.24	57.34	60.27
40	20.71	22.16	23.84	26.51	29.05	51.81	55.76	60.44	63.69	66.77
45	24.31	25.90	27.72	30.61	33.35	57.51	61.66	66.56	69.96	73.17
50	27.99	29.71	31.66	34.76	37.69	63.17	67.50	72.61	76.15	79.49
55	31.73	33.57	35.66	38.96	42.06	68.80	73.31	78.62	82.29	85.75
60	35.53	37.48	39.70	43.19	46.46	74.40	79.08	84.58	88.38	91.95
70	43.28	45.44	47.89	51.74	55.33	85.53	90.53	96.39	100.4	104.2
80	51.17	53.54	56.21	60.39	64.28	96.58	101.9	108.1	112.3	116.3
90	59.20	61.75	64.63	69.13	73.29	107.6	113.1	119.6	124.1	128.3
100	67.33	70.06	73.14	77.93	82.36	118.5	124.3	131.1	135.8	140.2

C Student-Verteilungen

α-Quantile $t_{n;\alpha}$ der t-Verteilungen $\boldsymbol{t}_n$ mit n Freiheitsgraden. $t_{n;\alpha}$ ist der Wert $c > 0$ mit $\boldsymbol{t}_n(]-\infty, c]) = \alpha$. Für $n = \infty$ sind die Quantile $\lim_{n\to\infty} t_{n;\alpha} = \Phi^{-1}(\alpha)$ der Standardnormalverteilung angegeben, siehe Aufgabe 9.12.

$\alpha =$	0.9	0.95	0.96	0.975	0.98	0.99	0.995
$n=1$	3.078	6.314	7.916	12.71	15.89	31.82	63.66
2	1.886	2.920	3.320	4.303	4.849	6.965	9.925
3	1.638	2.353	2.605	3.182	3.482	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.333	2.776	2.999	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.191	2.571	2.757	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.104	2.447	2.612	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.046	2.365	2.517	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.004	2.306	2.449	2.896	3.355
9	1.383	1.833	1.973	2.262	2.398	2.821	3.250
10	1.372	1.812	1.948	2.228	2.359	2.764	3.169
11	1.363	1.796	1.928	2.201	2.328	2.718	3.106
12	1.356	1.782	1.912	2.179	2.303	2.681	3.055
13	1.350	1.771	1.899	2.160	2.282	2.650	3.012
14	1.345	1.761	1.887	2.145	2.264	2.624	2.977
15	1.341	1.753	1.878	2.131	2.249	2.602	2.947
16	1.337	1.746	1.869	2.120	2.235	2.583	2.921
17	1.333	1.740	1.862	2.110	2.224	2.567	2.898
18	1.330	1.734	1.855	2.101	2.214	2.552	2.878
19	1.328	1.729	1.850	2.093	2.205	2.539	2.861
20	1.325	1.725	1.844	2.086	2.197	2.528	2.845
21	1.323	1.721	1.840	2.080	2.189	2.518	2.831
22	1.321	1.717	1.835	2.074	2.183	2.508	2.819
23	1.319	1.714	1.832	2.069	2.177	2.500	2.807
24	1.318	1.711	1.828	2.064	2.172	2.492	2.797
25	1.316	1.708	1.825	2.060	2.167	2.485	2.787
29	1.311	1.699	1.814	2.045	2.150	2.462	2.756
34	1.307	1.691	1.805	2.032	2.136	2.441	2.728
39	1.304	1.685	1.798	2.023	2.125	2.426	2.708
49	1.299	1.677	1.788	2.010	2.110	2.405	2.680
59	1.296	1.671	1.781	2.001	2.100	2.391	2.662
69	1.294	1.667	1.777	1.995	2.093	2.382	2.649
79	1.292	1.664	1.773	1.990	2.088	2.374	2.640
89	1.291	1.662	1.771	1.987	2.084	2.369	2.632
99	1.290	1.660	1.769	1.984	2.081	2.365	2.626
149	1.287	1.655	1.763	1.976	2.072	2.352	2.609
199	1.286	1.653	1.760	1.972	2.067	2.345	2.601
299	1.284	1.650	1.757	1.968	2.063	2.339	2.592
∞	1.282	1.645	1.751	1.960	2.054	2.326	2.576

D Fisher- und Beta-Verteilungen

α-Quantile $f_{m,n;\alpha}$ der $\mathcal{F}_{m,n}$-Verteilungen mit m Freiheitsgraden im Zähler und n Freiheitsgraden im Nenner. $f_{m,n;\alpha}$ ist der Wert $c > 0$ mit $\mathcal{F}_{m,n}([0, c]) = \alpha$. Mit Hilfe von Bemerkung (9.14) bekommt man die entsprechenden Quantile der Beta-Verteilungen. Der Wert für $n = \infty$ ist der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_{m,n;\alpha} = \chi^2_{m;\alpha}/m$, vgl. Aufgabe 9.12.

95%-Quantile $f_{m,n;0.95}$

$m=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n=1$	161.	199.	216.	225.	230.	234.	237.	239.	241.	242.
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16
35	4.12	3.27	2.87	2.64	2.49	2.37	2.29	2.22	2.16	2.11
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08
45	4.06	3.20	2.81	2.58	2.42	2.31	2.22	2.15	2.10	2.05
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02	1.97
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99	1.94
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93
150	3.90	3.06	2.66	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83