Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2024
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

7. Übungsblatt „Einführung in die Statistik"

Abgabe bis Dienstag 4.6.

---

1. (Varianzminimierende Schätzer) Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt.

a) Zeigen Sie, dass für $X_i \sim \text{Bernoulli(p)}$ der Stichprobenmittelwert $\overline{X}_n$ ein erwartungstreuer Schätzer für p mit minimaler Varianz ist.

b) Bestimmen Sie im Fall $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ einen erwartungstreuen Schätzer mit minimaler Varianz für die mittlere Wartezeit $1/\lambda$. Gibt es einen erwartungstreuen Schätzer für die Intensität λ, der die untere Schranke aus der Informationsungleichung realisiert?

c) Angenommen, bei der Vermessung des Radius eines Kreises tritt ein Fehler auf, der normalverteilt ist mit Mittel 0 und bekannter Varianz v. Geben Sie einen erwartungstreuen Schätzer für die Kreisfläche an, der auf n unabhängigen Messungen basiert. Ist der Schätzer varianzminimierend?

2. (Relative Entropie und wechselseitige Information) Die *wechselseitige Information* zweier Zufallsvariablen X und Y mit Verteilungen μ_X und μ_Y und gemeinsamer Verteilung $\mu_{X,Y}$ ist definiert als

$$I(X,Y) \;=\; H\left(\mu_{X,Y} \mid \mu_X \otimes \mu_Y\right).$$

Seien X und Y gemeinsam normalverteilt mit Mittelwerten m und $\tilde{m}$, Varianzen v und $\tilde{v}$, Kovarianz c, und Korrelationskoeffizient $\rho = c/\sqrt{v\tilde{v}}$. Zeigen Sie:

a) $H(\mu_X|\mu_Y) \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{v}}{v} - 1 - \log\left(\frac{\tilde{v}}{v}\right) + \frac{(\tilde{m}-m)^2}{v}\right)$.

b) $I(X,Y) \;=\; -\frac{1}{2}\log(1-\rho^2)$.

c) Interpretieren Sie die Ergebnisse anschaulich.

3. (Einkommensverteilung) Seien $x_1, \dots, x_n$ die Einkommen von n zufällig aus einer bestimmten Grundgesamtheit ausgewählten Personen. Ein mögliches Modell für die Einkommensverteilung ist die Pareto-Verteilung mit Parametern $\theta > 1$ und $c > 0$. Wir nehmen an, dass c bekannt ist. Die Dichte der Pareto-Verteilung ist dann

$$f_\theta(x) \;=\; c^\theta \theta x^{-(1+\theta)}\, \mathbf{1}_{x>c}.$$

a) Geben Sie das mittlere Einkommen m in Abhängigkeit von θ an.

b) Finden Sie die optimale Teststatistik für den Test $H_0\colon m = m_0$ versus $H_1\colon m > m_0$.

c) Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz, um eine Normalapproximation für den Schwellenwert des Tests in Teil b) zu finden.

4. (Zwei Hypothesentests)

a) Es werden $n = 17$ Trauerschnäpper in Käfigen einer Beleuchtung mit blauem Licht ausgesetzt (Versuchsbedingung 1) und jeweils in mehreren Durchgängen ihre Flugrichtung ermittelt. Die Flugrichtung wird als Punkt auf einem Kreis dargestellt. Aus allen Punkten auf dem Kreis wird der Schwerpunktvektor ermittelt. Danach wird der gleiche Versuch mit grünem Licht (Bedingung 2) durchgeführt. Für jeden Vogel i = 1,...,17 bezeichnen wir mit x_i^1 die Länge des Schwerpunktvektors bei blauem Licht und mit x_i^2 die Länge des Schwerpunktvektors bei grünem Licht. Sei $x_i = x_i^2 - x_i^1$ die Differenz. Da Schwerpunktvektoren Mittelwerte vieler zufälliger Beobachtungen sind, können wir davon ausgehen, dass diese approximativ normalverteilt sind mit konstanter Varianz σ^2. Untersuchen Sie, ob sich die Hypothese, dass die Farbe des Lichtes keine Rolle für die Orientierungsgenauigkeit der Trauerschnäpper spielt, zum Niveau 0,05 verwerfen lässt. Der Stichprobenmittelwert der x_i beträgt $\bar{x} = 0.0518$ und die Stichprobenvarianz $s^2 = 0.0912$.

b) In einer Urne liegen s schwarze und $n - s$ rote Kugeln. Die Gesamtanzahl der Kugeln sei bekannt. Wir möchten die unbekannte Anzahl $\theta = s$ der schwarzen Kugeln schätzen und ziehen dazu ohne Zurücklegen N ($N < n$) Kugeln. Bestimmen Sie einen gleichmäßig mächtigsten Test für die Hypothese $\Theta_0 = \{0, \ldots, \theta_0\}$ gegen die Alternative $\Theta_1 = \{\theta_1, \theta_1 + 1, \ldots, n\}$, mit $\theta_1 > \theta_0$.

5. (Zusatzaufgabe: Entropie und Kodierung) Sei S eine endliche Menge mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung μ. Wir fassen die Elemente von S als Buchstaben, μ als relative Häufigkeit der einzelnen Buchstaben und S^n als Menge von Nachrichten der Länge n auf, die wir in Sequenzen von 0 und 1 kodieren wollen.

a) Wie viele Bits werden benötigt, um alle Nachrichten in S^n *eindeutig* zu kodieren?

b) Zeigen Sie, dass die Folge von Teilmengen

$$B_{n,\epsilon} \;=\; \left\{x \in S^n \;:\; 2^{-n(H_2(\mu)+\epsilon)} \leq \mu^n(x_1, \ldots, x_n) \leq 2^{-n(H_2(\mu)-\epsilon)}\right\} \;\subseteq\; S^n$$

für jedes $\epsilon > 0$ *wesentlich bzgl.* μ^n ist, d.h. $\lim_{n\to\infty} \mu^n[B_{n,\epsilon}] = 1$, und, dass

$$|B_{n,\epsilon}| \;\leq\; 2^{n(H_2(\mu)+\epsilon)} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Hierbei ist $H_2(\mu) = -\sum_{x:\mu(x)\neq 0} \mu(x) \log_2 \mu(x)$ die Entropie zur Basis 2.

c) Zeigen Sie, dass für jede wesentliche Folge von Teilmengen $A_n \subseteq S^n$ gilt:

$$|A_n| \;\succeq\; 2^{nH_2(\mu)}\,.$$

d) Interpretieren Sie diese Ergebnisse in Bezug auf a).