Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2024
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

5. Übungsblatt „Einführung in die Statistik”

Abgabe bis Dienstag 14.5 bei Ihrem Tutor.

---

1. (Beispiele zu Hypothesentests)

a) Um zu überprüfen, ob die Kommunikation mit einem Satelliten funktioniert, wird von der Erde aus ein Signal gesendet. Empfängt der Satellit das Signal, antwortet er, indem er ein Signal der Intensität m für n Sekunden ausstrahlt. Wegen des allgemeinen Hintergrundrauschens schwanken die auf der Erde empfangenen Signale zufällig, unabhängig davon, ob der Satellit sendet oder nicht. Für jede der n Sekunden wird die mittlere Spannung des auf der Erde empfangenen Signals aufgezeichnet. Sei x_i die mittlere Spannung des in der i-ten Sekunde empfangenen Signals abzüglich der erwarteten mittleren Spannung aufgrund des Hintergrundrauschens. Wir nehmen an, dass die Messwerte x_i Realisierungen von unabhängigen Zufallsvariablen X_i mit Verteilung $\mathrm{N}(\theta, v)$ sind, wobei $\theta = m$ ist, falls die Kommunikation mit dem Satelliten funktioniert, und $\theta = 0$ sonst. Sie möchten nun eines von zwei Systemen kaufen. Das *signal-to-noise-ratio* $m/\sqrt{v}$ beträgt 2 für das erste System, und 1 für das zweite. Das erste System kostet 10^6€, das andere 10^5€. Eine Sekunde Übertragung mit einem der beiden Systeme kostet jeweils 10^3€. Unabhängig davon, welches System Sie kaufen, wollen Sie den Satelliten im Laufe eines Jahres 100 mal testen. Wenn Sie bei jedem Test eine ausreichende Anzahl von Sekunden benötigen, um sicherzustellen, dass alle Fehlerwahrscheinlichkeiten ≤ 0.05 sind, welches System ist dann auf der Grundlage eines Jahresbetriebs günstiger?

b) Wie schon in Aufgabe 3 a) von Blatt 3 betrachten wir erneut das *Hardy-Weinberg-Gleichgewicht* der Populationsgenetik mit unbekanntem Parameter $\theta \in (0, 1)$. Bestimmen Sie den mächtigsten Test für das Testproblem $H_0\colon \theta = \theta_0$ versus $H_1\colon \theta = \theta_1$.

2. (Ein gezinkter Würfel?) Ein Spieler beobachtet ein Spiel, bei dem ein einzelner Würfel wiederholt geworfen wird. Dabei gewinnt er den Eindruck, dass die 6 bei etwa 18% der Würfe und die 5 bei etwa 14% der Würfe fällt, während die anderen vier Augenzahlen gleich häufig auftreten. Nach der Aufforderung mitzuspielen bittet der Spieler darum, seine Hypothese zunächst testen zu dürfen, indem er den Würfel n-mal wirft.

a) Welche Teststatistik sollte er verwenden, wenn die einzige Alternative, die er in Betracht zieht, ist, dass der Würfel fair ist?

b) Zeigen Sie, dass für $n = 2$ der mächtigste Test zum Niveau 0.0196 die Nullhypothese genau dann verwirft, wenn zweimal die 5 fällt.

c) Ist $(N_1, \ldots, N_k)$ eine multinomialverteilte Zufallsvariable mit Parametern $n, p_1, \ldots, p_k$, dann hat die Summe $a_1 N_1 + \ldots + a_k N_k$ nach dem mehrdimensionalen zentralen Grenzwertsatz annähernd die Verteilung $N(nm, nv)$ mit $m = \sum_{i=1}^k a_i p_i$ und $v = \sum_{i=1}^k (a_i - m)^2 p_i$. Benutzen Sie dies, um den Schwellenwert des mächtigsten Tests zum Niveau α für obiges Problem näherungsweise zu berechnen.

3. (Öffnungszeiten eines Serviceschalters) Sei x_i die Anzahl der Ankünfte an einem Serviceschalter am i-ten von n Tagen. Ein mögliches Modell für diese Daten ist die Annahme, dass die Kunden nach einem homogenen *Poisson-Prozess* ankommen. In diesem Fall ist x_i eine Stichprobe einer Poisson-Verteilung mit dem Parameter θ, der erwarteten Anzahl der Ankünfte pro Tag. Angenommen, es lohnt sich nicht, den Serviceschalter offen zu halten, wenn $\theta \leq \theta_0$ ist.

a) Bestimmen Sie die gleichmäßig mächtigste Teststatistik für $H_0 \colon \theta \leq \theta_0$ vs. $H_1 \colon \theta > \theta_0$. Für welche Niveaus α gibt es einen gleichmäßig mächtigsten nichtrandomisierten Test?

b) Welche Verteilungstabelle würden Sie benötigen, um die Macht des gleichmäßg mächtigsten Tests zu berechnen?

c) Sie möchten sicherstellen, dass bei einer Ankunftsrate von $\theta \leq 10$ die Wahrscheinlichkeit, dass Sie sich für die Öffnung entscheiden, $\leq 0,01$ ist, und dass bei einer Ankunftsrate $\theta \geq 15$ die Wahrscheinlichkeit, dass Sie sich für die Schließung entscheiden, ebenfalls $\leq 0,01$ ist. Wie viele Tage müssen Sie beobachten, um sicherzustellen, dass der Test diese Bedingung erfüllt? *(Sie können die Normalapproximation verwenden.)*

4. (Stichprobenumfänge bei Schätzung eines Binomialparameters)
Bisher haben wir den Stichprobenumfang n als fest vorgegeben betrachtet. Mitunter kann man vor der Datenerhebung überlegen, wie groß die Stichprobe eigentlich sein sollte. Als Beispiel betrachten wir $H \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ und das $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für p nach der Wilson-Methode.

a) Beweisen Sie die Umformung aus der Vorlesung: Für $p, \hat{p} \in [0,1]$ und $c > 0$ gilt $\hat{p} \leq p + c\sqrt{p(1-p)}$ bzw. $\hat{p} \geq p - c\sqrt{p(1-p)}$ genau dann, wenn

$$p \;\geq\; \frac{\hat{p} + c^2/2 \;-\; c\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p}) + c^2/4}}{1+c^2} \quad \text{bzw.} \quad p \;\leq\; \frac{\hat{p} + c^2/2 \;+\; c\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p}) + c^2/4}}{1+c^2}.$$

b) Wie groß muss der Stichprobenumfang sein, damit die Länge des Vertrauensintervalls garantiert kleiner oder gleich $\delta > 0$ ist? Zu welchem Ergebnis gelangen Sie für $\alpha = 0.05$ und $\delta = 0.03$?

c) Von zwei vorgegebenen Werten $0 < p_1 < p_2 < 1$ soll das Vertrauensintervall höchstens einen enthalten. Wie groß muss n sein, damit dies gewährleistet ist?

d) Für die FDP ist ein Wähleranteil von $p_1 = 5\%$ oder darunter wegen der 5%-Hürde verheerend, ein Wähleranteil von $p_2 = 10\%$ oder darüber ist schon ein Anlass zum Feiern. Wie groß muss der Stichprobenumfang sein, damit man mindestens einen dieser Fälle mit einer Sicherheit von ca. 95% ausschließen kann?