Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2024
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

13. Übungsblatt „Einführung in die Statistik"

Für dieses Übungsblatt ist keine Abgabe erforderlich. Hinweise zur Klausur:

- **Diese findet am Montag 22.7. von 9 bis 11 Uhr im GHS und KHS statt.**
- **Unterlagen, Taschenrechner, Smartphones etc. sind nicht zugelassen.**
- **Mit der Klausur erhalten Sie auch die Verteilungstabellen unten.**

---

1. (Lineares Modell) Für zwei Objekte mit unbekannten Gewichten w_1 und w_2 werden die Gewichte der Einzelobjekte, die Summe und Differenz der Gewichte gemessen. Jede der vier Messungen sei mit einem unabhängigen Fehler derselben Varianz behaftet. Es wurden die Messwerte 3.4, 2.9, 6.3, 0.7 beobachtet.

a) Stellen Sie ein lineares Modell auf.

b) Bestimmen Sie die Kleinste-Quadrate-Schätzer für w_1, w_2 und $w_1 - w_2$, sowie deren geschätzte Streuung.

c) Testen Sie die Hypothese $H_0 : w_1 = w_2$ gegen $H_1 : w_1 \neq w_2$ unter der Annahme normalverteilter Messfehler.

2. (Lineare Regression mit R) Auf der Vorlesungshomepage finden Sie eine Datei mit dem in der Vorlesung betrachteten Datensatz *carmileage*.

a) Bestimmen und plotten Sie den Benzinverbrauch und die entsprechenden Regressionsgeraden in Abhängigkeit von den übrigen Kenngrößen. Beachten Sie, dass der Benzinverbrauch (in Gallon pro Meile) das Inverse der Kenngröße MPG (miles per gallon) ist.

b) Bestimmen und plotten Sie auch die logarithmierten Werte, und die entsprechenden Regressionsgeraden. Vergleichen Sie die Ergebnisse aus a) und b).

c) Schätzen Sie die Koeffizienten im multiplen Regressionsmodell für den Benzinverbrauch in Abhängigkeit von den anderen Kenngrößen, und interpretieren Sie die Ergebnisse.

d) Führen Sie die Befehle summary(...) und plot(..) für die oben betrachteten Regressionsmodelle aus. Welche Statistiken und Grafiken werden dargestellt?
Literatur: Petzoldt, Skript zur Datenanalyse mit R, Abschnitt 7.3.

3. (Bayes I) Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängig mit $P[X_i = 1] = p$ und $P[X_i = 0] = 1-p$. Wir betrachten ein Bayessches Modell, in dem die a priori Verteilung für den unbekannten Parameter p eine Beta-Verteilung mit Parametern $a, b > 0$ ist.

a) Bestimmen Sie die a posteriori Verteilung gegeben die Beobachtungswerte $X_1 = x_1$, $X_2 = x_2$, ... ,$X_n = x_n$.

b) Berechnen Sie den Bayes-Schätzer.

c) Sei $x = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$. Skizzieren Sie die Graphen der posteriori Dichten für die a priori Verteilungen $\beta(1/2, 1/2)$, $\beta(1, 1)$, $\beta(10, 10)$ und $\beta(100, 100)$.

d) Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Hinweis: Der Erwartungswert der Beta-Verteilung ist $b/(a + b)$.

4. (Bayes II: Das lineare Gauß-Modell) Sei

$$Y = Aw + \varepsilon$$

mit unbekanntem Parameter $w \in \mathbb{R}^d$, Design-Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$ und Störterm $\varepsilon \sim N(0, C)$, wobei die Kovarianzmatrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit ist. Wir betrachten das Bayes-Modell mit a priori Verteilung $w \sim N(0, C_{\text{prior}})$, $C_{\text{prior}} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrisch und positiv definit.

a) Bestimmen Sie die a posteriori Verteilung im Gaußschen Produktmodell, d.h. im Fall $d = 1$, $A = (1, 1, \ldots, 1)^T$ und $C = v \cdot I_n$. Vergleichen Sie die den Bayes-Schätzer mit dem Maximum-Likelihood-Schätzer.

b) Bestimmen Sie die a posteriori Verteilung im allgemeinen Fall.

c) Interpretieren Sie das Ergebnis aus b) im Fall $C = v \cdot I_n$. Welchen Zusammenhang gibt es mit dem kleinste Quadrate Verfahren?

Verteilungstabellen

A Normalverteilung

Verteilungsfunktion $\Phi(c) = \mathcal{N}_{0,1}(]-\infty, c]) = 1 - \Phi(-c)$ der Standardnormalverteilung. Den Wert etwa für $c = 1.16$ findet man in der Zeile 1.1 und Spalte .06: $\Phi(1.16) = 0.8770$. Das α-Quantil von $\mathcal{N}_{0,1}$ findet man, indem man den Wert α in der Tabelle lokalisiert und Zeilen- und Spaltenwert addiert: $\Phi^{-1}(0.975) = 1.96$; einige Quantile stehen auch in Tabelle C. Für große Werte von c siehe Aufgabe 5.15.

c	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

B Chiquadrat- und Gamma-Verteilungen

α-Quantile $\chi^2_{n;\alpha}$ der Chiquadrat-Verteilungen $\boldsymbol{\chi}^2_n = \Gamma_{1/2,n/2}$ mit n Freiheitsgraden. $\chi^2_{n;\alpha}$ ist der Wert $c > 0$ mit $\boldsymbol{\chi}^2_n([0,c]) = \alpha$. Durch Skalierung erhält man die Quantile der Gamma-Verteilungen $\Gamma_{\lambda,r}$ mit $\lambda > 0$ und $2r \in \mathbb{N}$. Für große n verwende man die Approximationen aus den Aufgaben 9.10 und 9.11. Notation: ${}^{-5}3.9 = 3.9 \cdot 10^{-5}$.

$\alpha =$	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1	0.9	0.95	0.98	0.99	0.995
$n=1$	${}^{-5}3.9$	${}^{-4}1.6$	${}^{-4}6.3$	${}^{-3}3.9$	.0158	2.706	3.841	5.412	6.635	7.879
2	.0100	.0201	.0404	.1026	.2107	4.605	5.991	7.824	9.210	10.60
3	.0717	.1148	.1848	.3518	.5844	6.251	7.815	9.837	11.34	12.84
4	.2070	.2971	.4294	.7107	1.064	7.779	9.488	11.67	13.28	14.86
5	.4117	.5543	.7519	1.145	1.610	9.236	11.07	13.39	15.09	16.75
6	.6757	.8721	1.134	1.635	2.204	10.64	12.59	15.03	16.81	18.55
7	.9893	1.239	1.564	2.167	2.833	12.02	14.07	16.62	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.032	2.733	3.490	13.36	15.51	18.17	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.532	3.325	4.168	14.68	16.92	19.68	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.059	3.940	4.865	15.99	18.31	21.16	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.609	4.575	5.578	17.28	19.68	22.62	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.178	5.226	6.304	18.55	21.03	24.05	26.22	28.30
13	3.565	4.107	4.765	5.892	7.042	19.81	22.36	25.47	27.69	29.82
14	4.075	4.660	5.368	6.571	7.790	21.06	23.68	26.87	29.14	31.32
15	4.601	5.229	5.985	7.261	8.547	22.31	25.00	28.26	30.58	32.80
16	5.142	5.812	6.614	7.962	9.312	23.54	26.30	29.63	32.00	34.27
17	5.697	6.408	7.255	8.672	10.09	24.77	27.59	31.00	33.41	35.72
18	6.265	7.015	7.906	9.390	10.86	25.99	28.87	32.35	34.81	37.16
19	6.844	7.633	8.567	10.12	11.65	27.20	30.14	33.69	36.19	38.58
20	7.434	8.260	9.237	10.85	12.44	28.41	31.41	35.02	37.57	40.00
21	8.034	8.897	9.915	11.59	13.24	29.62	32.67	36.34	38.93	41.40
22	8.643	9.542	10.60	12.34	14.04	30.81	33.92	37.66	40.29	42.80
23	9.260	10.20	11.29	13.09	14.85	32.01	35.17	38.97	41.64	44.18
24	9.886	10.86	11.99	13.85	15.66	33.20	36.42	40.27	42.98	45.56
25	10.52	11.52	12.70	14.61	16.47	34.38	37.65	41.57	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.41	15.38	17.29	35.56	38.89	42.86	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.13	16.15	18.11	36.74	40.11	44.14	46.96	49.64
28	12.46	13.56	14.85	16.93	18.94	37.92	41.34	45.42	48.28	50.99
29	13.12	14.26	15.57	17.71	19.77	39.09	42.56	46.69	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.31	18.49	20.60	40.26	43.77	47.96	50.89	53.67
35	17.19	18.51	20.03	22.47	24.80	46.06	49.80	54.24	57.34	60.27
40	20.71	22.16	23.84	26.51	29.05	51.81	55.76	60.44	63.69	66.77
45	24.31	25.90	27.72	30.61	33.35	57.51	61.66	66.56	69.96	73.17
50	27.99	29.71	31.66	34.76	37.69	63.17	67.50	72.61	76.15	79.49
55	31.73	33.57	35.66	38.96	42.06	68.80	73.31	78.62	82.29	85.75
60	35.53	37.48	39.70	43.19	46.46	74.40	79.08	84.58	88.38	91.95
70	43.28	45.44	47.89	51.74	55.33	85.53	90.53	96.39	100.4	104.2
80	51.17	53.54	56.21	60.39	64.28	96.58	101.9	108.1	112.3	116.3
90	59.20	61.75	64.63	69.13	73.29	107.6	113.1	119.6	124.1	128.3
100	67.33	70.06	73.14	77.93	82.36	118.5	124.3	131.1	135.8	140.2

C Student-Verteilungen

α-Quantile $t_{n;\alpha}$ der t-Verteilungen $\boldsymbol{t}_n$ mit n Freiheitsgraden. $t_{n;\alpha}$ ist der Wert $c > 0$ mit $\boldsymbol{t}_n(]-\infty, c]) = \alpha$. Für $n = \infty$ sind die Quantile $\lim_{n\to\infty} t_{n;\alpha} = \Phi^{-1}(\alpha)$ der Standardnormalverteilung angegeben, siehe Aufgabe 9.12.

$\alpha =$	0.9	0.95	0.96	0.975	0.98	0.99	0.995
$n = 1$	3.078	6.314	7.916	12.71	15.89	31.82	63.66
2	1.886	2.920	3.320	4.303	4.849	6.965	9.925
3	1.638	2.353	2.605	3.182	3.482	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.333	2.776	2.999	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.191	2.571	2.757	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.104	2.447	2.612	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.046	2.365	2.517	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.004	2.306	2.449	2.896	3.355
9	1.383	1.833	1.973	2.262	2.398	2.821	3.250
10	1.372	1.812	1.948	2.228	2.359	2.764	3.169
11	1.363	1.796	1.928	2.201	2.328	2.718	3.106
12	1.356	1.782	1.912	2.179	2.303	2.681	3.055
13	1.350	1.771	1.899	2.160	2.282	2.650	3.012
14	1.345	1.761	1.887	2.145	2.264	2.624	2.977
15	1.341	1.753	1.878	2.131	2.249	2.602	2.947
16	1.337	1.746	1.869	2.120	2.235	2.583	2.921
17	1.333	1.740	1.862	2.110	2.224	2.567	2.898
18	1.330	1.734	1.855	2.101	2.214	2.552	2.878
19	1.328	1.729	1.850	2.093	2.205	2.539	2.861
20	1.325	1.725	1.844	2.086	2.197	2.528	2.845
21	1.323	1.721	1.840	2.080	2.189	2.518	2.831
22	1.321	1.717	1.835	2.074	2.183	2.508	2.819
23	1.319	1.714	1.832	2.069	2.177	2.500	2.807
24	1.318	1.711	1.828	2.064	2.172	2.492	2.797
25	1.316	1.708	1.825	2.060	2.167	2.485	2.787
29	1.311	1.699	1.814	2.045	2.150	2.462	2.756
34	1.307	1.691	1.805	2.032	2.136	2.441	2.728
39	1.304	1.685	1.798	2.023	2.125	2.426	2.708
49	1.299	1.677	1.788	2.010	2.110	2.405	2.680
59	1.296	1.671	1.781	2.001	2.100	2.391	2.662
69	1.294	1.667	1.777	1.995	2.093	2.382	2.649
79	1.292	1.664	1.773	1.990	2.088	2.374	2.640
89	1.291	1.662	1.771	1.987	2.084	2.369	2.632
99	1.290	1.660	1.769	1.984	2.081	2.365	2.626
149	1.287	1.655	1.763	1.976	2.072	2.352	2.609
199	1.286	1.653	1.760	1.972	2.067	2.345	2.601
299	1.284	1.650	1.757	1.968	2.063	2.339	2.592
∞	1.282	1.645	1.751	1.960	2.054	2.326	2.576

D Fisher- und Beta-Verteilungen

α-Quantile $f_{m,n;\alpha}$ der $\mathcal{F}_{m,n}$-Verteilungen mit m Freiheitsgraden im Zähler und n Freiheitsgraden im Nenner. $f_{m,n;\alpha}$ ist der Wert $c > 0$ mit $\mathcal{F}_{m,n}([0, c]) = \alpha$. Mit Hilfe von Bemerkung (9.14) bekommt man die entsprechenden Quantile der Beta-Verteilungen. Der Wert für $n = \infty$ ist der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_{m,n;\alpha} = \chi^2_{m;\alpha}/m$, vgl. Aufgabe 9.12.

95%-Quantile $f_{m,n;0.95}$

$m=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n=1$	161.	199.	216.	225.	230.	234.	237.	239.	241.	242.
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16
35	4.12	3.27	2.87	2.64	2.49	2.37	2.29	2.22	2.16	2.11
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08
45	4.06	3.20	2.81	2.58	2.42	2.31	2.22	2.15	2.10	2.05
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02	1.97
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99	1.94
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93
150	3.90	3.06	2.66	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83