Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2024
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

1. Übungsblatt „Einführung in die Statistik”

Abgabe der Aufgaben 1-4 bis Dienstag 16.4, 8.15 Uhr bei Ihrem Tutor.
Aufgabe 0 wird als Anwesenheitsaufgabe im ersten Tutorium besprochen.

---

0. (Quantilstransformation) Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Verteilungsfunktion F. Die *untere Quantilsfunktion* $\underline{G} : (0,1) \to \mathbb{R}$ ist für $u \in (0,1)$ definiert als

$$\underline{G}(u) \;:=\; \inf\{c \in \mathbb{R} : F(c) \geq u\} \;=\; \sup\{c \in \mathbb{R} : F(c) < u\}.$$

a) Sei $\mathrm{Unif}(a,b)$ die Gleichverteilung auf dem Intervall (a,b) und δ_a das Diracmaß an der Stelle a. Wie sehen die Graphen von F und $\underline{G}$ aus, falls die Verteilung von X gleich $\frac{2}{3}\mathrm{Unif}(0,4) + \frac{1}{3}\delta_2$ ist?

b) Zeigen Sie allgemein, dass $\underline{G}$ eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum

$$((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \mathrm{Unif}(0,1))$$

ist, die dieselbe Verteilung wie X unter $\mathbb{P}$ hat.

c) Die Transformation $u \mapsto \underline{G}(u)$ liefert eine Möglichkeit, Stichproben von X auf dem Computer zu simulieren. Wie können Sie beispielweise Stichproben von den Verteilungen $\mathrm{Unif}(a,b)$ und $\mathrm{Exp}(\lambda)$, von der Verteilung aus a), sowie von der Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(0,\infty)$ mit Dichtefunktion $f(x) = x \exp -x^2/2$ erzeugen?

1. (Mineralwasser oder Leitungswasser?)

a) Wir führen den Mineralwassertest mit acht Gläsern durch, von denen jeweils vier Mineral- bzw. Leitungswasser enthalten. Zeigen Sie, dass wir die Nullhypothese („die Testperson schmeckt keinen Unterschied”) nur dann signifikant zum Niveau 5 % verwerfen können, wenn die Testperson alle Proben richtig zuordnet.

b) Um der Testperson noch eine Chance zu geben, wenn sie nur drei der vier Gläser mit Mineralwasser richtig erkennt, könnte man den Test wie folgt verfeinern: Wir wiederholen das Basisexperiment mit acht Gläsern so oft, bis erstmalig die Anzahl x korrekt bestimmter Mineralwasserproben von 3 abweicht. Die Nullhypothese verwerfen wir genau dann, wenn bei diesem letzten Durchgang $x = 4$ gilt. Angenommen, die Nullhypothese trifft zu. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird sie verworfen? Und wie viele Gläser Wasser muss die Testperson unter der Nullhypothese im Mittel probieren?

2. (Wine-Tasting)

a) Emma behauptet, sie könne bei einem bestimmten Wein zuverlässig sagen, ob er vom Jahrgang A oder B stammt. Um dies nachzuweisen, einigt man sich auf ein Experiment, in welchem ihr n_A Gläser vom Jahrgang A und n_B Gläser vom Jahrgang B in zufälliger Reifenfolge präsentiert werden.

Wie sollte man n_A und n_B wählen, so dass man

- im Falle einer fehlerfreien Zuordnung Emmas Behauptung mit einer Sicherheit von 95% bestätigen kann, und
- die Gesamtzahl $n_A + n_B$ möglichst klein ist?

b) Frank behauptet, er schmecke ebenfalls den Unterschied zwischen diesen zwei Jahrgängen, könne allerdings nicht den genauen Jahrgang angeben. Wie sollte man n_A und n_B für Frank wählen, so dass die gleichen Ziele wie in Teil a) erreicht werden?

3. (Verteilungs- und Quantilfunktionen I) Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen Verteilungsfunktionen sind, und berechnen Sie jeweils die Quantilsfunktion $\underline{G}$.

(i)
$$F_1(x) = \frac{e^x}{1+e^x},$$

(ii)
$$F_2(x) = \exp(-\exp(-x)),$$

(iii)
$$F_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}},$$

(iv)
$$F_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ 1 - (1+x^2)^{-\gamma/2} & \text{für } x \geq 0, \end{cases} \quad \text{wobei } \gamma > 0 .$$

4. (Verteilungs- und Quantilfunktionen II) Sei Y eine reellwertige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und Quantilsfunktion $\underline{G}$.

a) Drücken Sie die Verteilungsfunktionen F_i und die Quantilsfunktionen $\underline{G}_i$ der folgenden Zufallsvariablen X_i durch F und $\underline{G}$ aus:

$$X_1 = \lceil Y \rceil, \quad X_2 = b^Y \text{ mit } b > 1, \quad X_3 = \log_b(Y) \text{ mit } b > 1,$$

wobei wir im letzten Fall $Y > 0$ voraussetzen.

b) Angenommen, die Verteilung von Y hat eine stetige Dichtefunktion f. Bestimmen Sie in diesem Fall die Dichtefunktionen von X_2 und X_3.