**Institut für angewandte Mathematik**
**Sommersemester 2022**
Andreas Eberle, Luis La Rocca

# Klausur „Einführung in die Statistik"

### Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

| Name: | | Vorname: | |
|---|---|---|---|
| Matrikelnr.: | | Studiengang: | |

**Wichtige Hinweise:**

- **Es sind keine eigenen Unterlagen, Handys, Taschenrechner u.ä. zugelassen!**
- **Am Ende der Klausur finden Sie einige Verteilungstabellen.**
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Bitte legen Sie den Studentenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis gut sichtbar neben Ihren Platz!
- Abgabe bis spätestens 10.00 Uhr.

**Viel Erfolg!**

Diese Felder NICHT ausfüllen:

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | | | **Summe** | **Note** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | | | | | | | | |

**1. (Einige kurze Fragen)** *[30 Punkte]*

In der Lösung dieser Aufgabe brauchen Sie (ausnahmsweise) *keine Begründungen anzugeben!*

a) Seien $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ Stichproben mit $n \in \mathbb{N}$ und $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$. Was ist in den folgenden Grafiken dargestellt? (mit Skizze)

   (i) Boxplot von $x$

   (ii) Streudiagramm von $x$ und $y$

b) Welche der folgenden Kenngrößen $K(x_1, \ldots, x_n)$ sind Lage- bzw. Skalenparameter?

   (i) Stichprobenmittelwert

   (ii) Schiefe

   (iii) Stichprobenmedian

   (iv) Spannweite

   (v) Interquartilsabstand

   (vi) Minimum von $x_1, \ldots, x_n$.

c) Wie ist die empirische Verteilungsfunktion von $x_1, \ldots, x_n$ definiert?

d) Seien $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Konstruieren Sie daraus Zufallsvariablen mit den folgenden Verteilungen:

   (i) Normalverteilung mit Mittelwert $m \in \mathbb{R}$ und Varianz $v > 0$

   (ii) Chiquadratverteilung mit $n$ Freiheitsgraden

   (iii) $t$-Verteilung mit $n$ Freiheitsgraden

   (iv) Fisher-Verteilung $F(m, n)$

   (v) Multivariate Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Kovarianzmatrix $C = \sigma\sigma^T$, wobei $\sigma$ eine $n \times n$-Matrix ist.

e) Was besagt die Informationsungleichung von Cramér-Rao?

f) Seien $\mu$ und $\nu$ absolutstetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\mathbb{R}^d$ mit strikt positiven Dichten $f(x)$ bzw. $g(x)$. Wie ist die relative Entropie (Kullback-Leibler-Divergenz) von $\mu$ bezüglich $\nu$ definiert?

g) Sei $x$ eine Stichprobe von einer der beiden Verteilungen $\mu$ bzw. $\nu$. Geben Sie einen mächtigsten Test für das folgende Testproblem an:

$$H_0: \ x \sim \mu\,, \qquad H_1: \ x \sim \nu\,.$$

**2. (Hypothesentests)** [*25 Punkte*]

Formulieren Sie in den folgenden Situationen jeweils ein statistisches Modell und ein Testproblem. Geben Sie die Entscheidungsregeln für Hypothesentests an, und berechnen Sie die $p$-Werte (falls nötig approximativ). Welche Entscheidung liefern die Tests zum Signifikanzniveau 5%?

a) Mit Hilfe eines Zweifach-Wahlapparats soll festgestellt werden, ob ein Käfer in der Lage ist, eine an einem von zwei Ausgängen angebrachte chemische Substanz zu orten. Bei 10 Versuchen nimmt der Käfer 2 mal den ersten Ausgang, und 8 mal den zweiten Ausgang.

b) Ein Spieler wirft bei 180 Würfen eines Würfels 40 mal eine „Sechs".

c) In einem Praktikumsversuch ergeben sich bei 10 Messungen einer reellwertigen Größe die folgenden Abweichungen vom theoretisch prognostizierten Wert:

$$4 \quad 8 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 6 \quad 3 \quad -1$$

Sie gehen davon aus, dass die Messwerte normalverteilt sind.

**3. (Robuste Schätzung des Bereichs von Zufallszahlen)** [*25 Punkte*]

Ein Zufallszahlengenerator erzeugt $n$ Zufallszahlen aus einem Interval $(0, \theta)$, wobei $\theta \in (0, \infty)$ ein unbekannter Parameter ist.

a) Formulieren Sie ein statistisches Modell.

b) Sei $\hat{q}_\alpha$ das $\alpha$-Stichprobenquantil von $x_1, \ldots, x_n$. Welche der folgenden Statistiken liefern erwartungstreue Schätzer für $\theta$? (ohne Beweis)

(i) $T_1(x) = 2\overline{x}$

(ii) $T_2(x) = 2\hat{q}_{1/2}$

(iii) $T_3(x) = x_{(n)} - x_{(1)}$

(iv) $T_4(x) = \frac{1}{n-2k} \sum_{i=k+1}^{n-k} x_{(i)}$ mit $k = \lfloor \tau n \rfloor$ für einen festen Wert $\tau \in (0, 1/2)$.

c) Welche dieser Schätzer sind robust? Begründen Sie kurz, und geben Sie ohne Beweis die asymptotischen Bruchpunkte der Schätzer an.

d) Bestimmen Sie für $n = 8$ ein (natürlich möglichst kleines) Konfidenzintervall für $\theta$ zum Konfidenzniveau $\alpha = 0,9$, dass durch einen einzelnen Ausreißer nicht beliebig stark verändert werden kann.

**4. (Lineare Regression)** *[35 Punkte]*

Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ feste Werte und $Y_1, \ldots, Y_n$ reelle Beobachtungswerte. Sie vermuten einen linearen Zusammenhang

$$Y_i \;=\; a + bx_i + \xi_i \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } \xi_i \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ unkorreliert.}$$

a) Wie könnte man überprüfen, ob die Normalverteilungsannahme gerechtfertigt ist?

b) Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta} = (\hat{a}, \hat{b})$ für $\theta = (a, b)$ mit dem Kleinste-Quadrate-Schätzer übereinstimmt.

c) Zeigen Sie, dass mit $\tilde{x}_i = x_i - \overline{x}$ und $\tilde{Y}_i = Y_i - \overline{Y}$ gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - a - bx_i)^2 \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{Y}_i - b\tilde{x}_i)^2 + \left(\overline{Y} - b\overline{x} - a\right)^2.$$

d) Folgern Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer gegeben ist durch

$$\hat{b} \;=\; \frac{\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\tilde{Y}_i}{\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i^2}\,, \qquad \hat{a} \;=\; \overline{Y} - b\overline{x}\,.$$

e) Zeigen Sie, dass $\hat{b}$ ein erwartungstreuer Schätzer für die Steigung $b$ der Regressionsgeraden mit Varianz $v = 1\,/\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ ist.

f) Welche Verteilung hat $\hat{b}$ ?

g) Bestimmen Sie ein rechtsseitiges Konfidenzintervall für $b$ zum Konfidenzniveau 98%.

h) Welche Realisierung des Konfidenzintervalls ergibt sich für $n = 10$ bei den Beobachtungswerten $\hat{b} = 2$ und $s_X = 1$ ? Was können Sie daraus über den Zusammenhang der zugrundeliegenden Merkmale $X$ und $Y$ schließen ?

# Verteilungstabellen

## A Normalverteilung

Verteilungsfunktion $\Phi(c) = \mathcal{N}_{0,1}(]-\infty, c]) = 1 - \Phi(-c)$ der Standardnormalverteilung. Den Wert etwa für $c = 1.16$ findet man in der Zeile 1.1 und Spalte .06: $\Phi(1.16) = 0.8770$. Das $\alpha$-Quantil von $\mathcal{N}_{0,1}$ findet man, indem man den Wert $\alpha$ in der Tabelle lokalisiert und Zeilen- und Spaltenwert addiert: $\Phi^{-1}(0.975) = 1.96$; einige Quantile stehen auch in Tabelle C. Für große Werte von $c$ siehe Aufgabe 5.15.

| $c$ | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| 0.1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| 0.2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| 0.3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| 0.4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| 0.5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| 0.6 | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| 0.7 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| 0.8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| 0.9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1.8 | .9641 | .9649 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| 1.9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| 2.0 | .9772 | .9778 | .9783 | .9788 | .9793 | .9798 | .9803 | .9808 | .9812 | .9817 |
| 2.1 | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857 |
| 2.2 | .9861 | .9864 | .9868 | .9871 | .9875 | .9878 | .9881 | .9884 | .9887 | .9890 |
| 2.3 | .9893 | .9896 | .9898 | .9901 | .9904 | .9906 | .9909 | .9911 | .9913 | .9916 |
| 2.4 | .9918 | .9920 | .9922 | .9925 | .9927 | .9929 | .9931 | .9932 | .9934 | .9936 |
| 2.5 | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 | .9951 | .9952 |
| 2.6 | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9959 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964 |
| 2.7 | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974 |
| 2.8 | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9979 | .9979 | .9980 | .9981 |
| 2.9 | .9981 | .9982 | .9982 | .9983 | .9984 | .9984 | .9985 | .9985 | .9986 | .9986 |
| 3.0 | .9987 | .9987 | .9987 | .9988 | .9988 | .9989 | .9989 | .9989 | .9990 | .9990 |

## B Chiquadrat- und Gamma-Verteilungen

$\alpha$-Quantile $\chi^2_{n;\alpha}$ der Chiquadrat-Verteilungen $\boldsymbol{\chi}^2_n = \Gamma_{1/2,n/2}$ mit $n$ Freiheitsgraden. $\chi^2_{n;\alpha}$ ist der Wert $c > 0$ mit $\boldsymbol{\chi}^2_n([0,c]) = \alpha$. Durch Skalierung erhält man die Quantile der Gamma-Verteilungen $\Gamma_{\lambda,r}$ mit $\lambda > 0$ und $2r \in \mathbb{N}$. Für große $n$ verwende man die Approximationen aus den Aufgaben 9.10 und 9.11. Notation: $^{-5}3.9 = 3.9 \cdot 10^{-5}$.

| $\alpha =$ | 0.005 | 0.01 | 0.02 | 0.05 | 0.1 | 0.9 | 0.95 | 0.98 | 0.99 | 0.995 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n = 1$ | $^{-5}3.9$ | $^{-4}1.6$ | $^{-4}6.3$ | $^{-3}3.9$ | .0158 | 2.706 | 3.841 | 5.412 | 6.635 | 7.879 |
| 2 | .0100 | .0201 | .0404 | .1026 | .2107 | 4.605 | 5.991 | 7.824 | 9.210 | 10.60 |
| 3 | .0717 | .1148 | .1848 | .3518 | .5844 | 6.251 | 7.815 | 9.837 | 11.34 | 12.84 |
| 4 | .2070 | .2971 | .4294 | .7107 | 1.064 | 7.779 | 9.488 | 11.67 | 13.28 | 14.86 |
| 5 | .4117 | .5543 | .7519 | 1.145 | 1.610 | 9.236 | 11.07 | 13.39 | 15.09 | 16.75 |
| 6 | .6757 | .8721 | 1.134 | 1.635 | 2.204 | 10.64 | 12.59 | 15.03 | 16.81 | 18.55 |
| 7 | .9893 | 1.239 | 1.564 | 2.167 | 2.833 | 12.02 | 14.07 | 16.62 | 18.48 | 20.28 |
| 8 | 1.344 | 1.646 | 2.032 | 2.733 | 3.490 | 13.36 | 15.51 | 18.17 | 20.09 | 21.95 |
| 9 | 1.735 | 2.088 | 2.532 | 3.325 | 4.168 | 14.68 | 16.92 | 19.68 | 21.67 | 23.59 |
| 10 | 2.156 | 2.558 | 3.059 | 3.940 | 4.865 | 15.99 | 18.31 | 21.16 | 23.21 | 25.19 |
| 11 | 2.603 | 3.053 | 3.609 | 4.575 | 5.578 | 17.28 | 19.68 | 22.62 | 24.72 | 26.76 |
| 12 | 3.074 | 3.571 | 4.178 | 5.226 | 6.304 | 18.55 | 21.03 | 24.05 | 26.22 | 28.30 |
| 13 | 3.565 | 4.107 | 4.765 | 5.892 | 7.042 | 19.81 | 22.36 | 25.47 | 27.69 | 29.82 |
| 14 | 4.075 | 4.660 | 5.368 | 6.571 | 7.790 | 21.06 | 23.68 | 26.87 | 29.14 | 31.32 |
| 15 | 4.601 | 5.229 | 5.985 | 7.261 | 8.547 | 22.31 | 25.00 | 28.26 | 30.58 | 32.80 |
| 16 | 5.142 | 5.812 | 6.614 | 7.962 | 9.312 | 23.54 | 26.30 | 29.63 | 32.00 | 34.27 |
| 17 | 5.697 | 6.408 | 7.255 | 8.672 | 10.09 | 24.77 | 27.59 | 31.00 | 33.41 | 35.72 |
| 18 | 6.265 | 7.015 | 7.906 | 9.390 | 10.86 | 25.99 | 28.87 | 32.35 | 34.81 | 37.16 |
| 19 | 6.844 | 7.633 | 8.567 | 10.12 | 11.65 | 27.20 | 30.14 | 33.69 | 36.19 | 38.58 |
| 20 | 7.434 | 8.260 | 9.237 | 10.85 | 12.44 | 28.41 | 31.41 | 35.02 | 37.57 | 40.00 |
| 21 | 8.034 | 8.897 | 9.915 | 11.59 | 13.24 | 29.62 | 32.67 | 36.34 | 38.93 | 41.40 |
| 22 | 8.643 | 9.542 | 10.60 | 12.34 | 14.04 | 30.81 | 33.92 | 37.66 | 40.29 | 42.80 |
| 23 | 9.260 | 10.20 | 11.29 | 13.09 | 14.85 | 32.01 | 35.17 | 38.97 | 41.64 | 44.18 |
| 24 | 9.886 | 10.86 | 11.99 | 13.85 | 15.66 | 33.20 | 36.42 | 40.27 | 42.98 | 45.56 |
| 25 | 10.52 | 11.52 | 12.70 | 14.61 | 16.47 | 34.38 | 37.65 | 41.57 | 44.31 | 46.93 |
| 26 | 11.16 | 12.20 | 13.41 | 15.38 | 17.29 | 35.56 | 38.89 | 42.86 | 45.64 | 48.29 |
| 27 | 11.81 | 12.88 | 14.13 | 16.15 | 18.11 | 36.74 | 40.11 | 44.14 | 46.96 | 49.64 |
| 28 | 12.46 | 13.56 | 14.85 | 16.93 | 18.94 | 37.92 | 41.34 | 45.42 | 48.28 | 50.99 |
| 29 | 13.12 | 14.26 | 15.57 | 17.71 | 19.77 | 39.09 | 42.56 | 46.69 | 49.59 | 52.34 |
| 30 | 13.79 | 14.95 | 16.31 | 18.49 | 20.60 | 40.26 | 43.77 | 47.96 | 50.89 | 53.67 |
| 35 | 17.19 | 18.51 | 20.03 | 22.47 | 24.80 | 46.06 | 49.80 | 54.24 | 57.34 | 60.27 |
| 40 | 20.71 | 22.16 | 23.84 | 26.51 | 29.05 | 51.81 | 55.76 | 60.44 | 63.69 | 66.77 |
| 45 | 24.31 | 25.90 | 27.72 | 30.61 | 33.35 | 57.51 | 61.66 | 66.56 | 69.96 | 73.17 |
| 50 | 27.99 | 29.71 | 31.66 | 34.76 | 37.69 | 63.17 | 67.50 | 72.61 | 76.15 | 79.49 |
| 55 | 31.73 | 33.57 | 35.66 | 38.96 | 42.06 | 68.80 | 73.31 | 78.62 | 82.29 | 85.75 |
| 60 | 35.53 | 37.48 | 39.70 | 43.19 | 46.46 | 74.40 | 79.08 | 84.58 | 88.38 | 91.95 |
| 70 | 43.28 | 45.44 | 47.89 | 51.74 | 55.33 | 85.53 | 90.53 | 96.39 | 100.4 | 104.2 |
| 80 | 51.17 | 53.54 | 56.21 | 60.39 | 64.28 | 96.58 | 101.9 | 108.1 | 112.3 | 116.3 |
| 90 | 59.20 | 61.75 | 64.63 | 69.13 | 73.29 | 107.6 | 113.1 | 119.6 | 124.1 | 128.3 |
| 100 | 67.33 | 70.06 | 73.14 | 77.93 | 82.36 | 118.5 | 124.3 | 131.1 | 135.8 | 140.2 |

## C Student-Verteilungen

$\alpha$-Quantile $t_{n;\alpha}$ der $t$-Verteilungen $\boldsymbol{t}_n$ mit $n$ Freiheitsgraden. $t_{n;\alpha}$ ist der Wert $c > 0$ mit $\boldsymbol{t}_n(]-\infty, c]) = \alpha$. Für $n = \infty$ sind die Quantile $\lim_{n\to\infty} t_{n;\alpha} = \Phi^{-1}(\alpha)$ der Standardnormalverteilung angegeben, siehe Aufgabe 9.12.

| $\alpha=$ | 0.9 | 0.95 | 0.96 | 0.975 | 0.98 | 0.99 | 0.995 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=1$ | 3.078 | 6.314 | 7.916 | 12.71 | 15.89 | 31.82 | 63.66 |
| 2 | 1.886 | 2.920 | 3.320 | 4.303 | 4.849 | 6.965 | 9.925 |
| 3 | 1.638 | 2.353 | 2.605 | 3.182 | 3.482 | 4.541 | 5.841 |
| 4 | 1.533 | 2.132 | 2.333 | 2.776 | 2.999 | 3.747 | 4.604 |
| 5 | 1.476 | 2.015 | 2.191 | 2.571 | 2.757 | 3.365 | 4.032 |
| 6 | 1.440 | 1.943 | 2.104 | 2.447 | 2.612 | 3.143 | 3.707 |
| 7 | 1.415 | 1.895 | 2.046 | 2.365 | 2.517 | 2.998 | 3.499 |
| 8 | 1.397 | 1.860 | 2.004 | 2.306 | 2.449 | 2.896 | 3.355 |
| 9 | 1.383 | 1.833 | 1.973 | 2.262 | 2.398 | 2.821 | 3.250 |
| 10 | 1.372 | 1.812 | 1.948 | 2.228 | 2.359 | 2.764 | 3.169 |
| 11 | 1.363 | 1.796 | 1.928 | 2.201 | 2.328 | 2.718 | 3.106 |
| 12 | 1.356 | 1.782 | 1.912 | 2.179 | 2.303 | 2.681 | 3.055 |
| 13 | 1.350 | 1.771 | 1.899 | 2.160 | 2.282 | 2.650 | 3.012 |
| 14 | 1.345 | 1.761 | 1.887 | 2.145 | 2.264 | 2.624 | 2.977 |
| 15 | 1.341 | 1.753 | 1.878 | 2.131 | 2.249 | 2.602 | 2.947 |
| 16 | 1.337 | 1.746 | 1.869 | 2.120 | 2.235 | 2.583 | 2.921 |
| 17 | 1.333 | 1.740 | 1.862 | 2.110 | 2.224 | 2.567 | 2.898 |
| 18 | 1.330 | 1.734 | 1.855 | 2.101 | 2.214 | 2.552 | 2.878 |
| 19 | 1.328 | 1.729 | 1.850 | 2.093 | 2.205 | 2.539 | 2.861 |
| 20 | 1.325 | 1.725 | 1.844 | 2.086 | 2.197 | 2.528 | 2.845 |
| 21 | 1.323 | 1.721 | 1.840 | 2.080 | 2.189 | 2.518 | 2.831 |
| 22 | 1.321 | 1.717 | 1.835 | 2.074 | 2.183 | 2.508 | 2.819 |
| 23 | 1.319 | 1.714 | 1.832 | 2.069 | 2.177 | 2.500 | 2.807 |
| 24 | 1.318 | 1.711 | 1.828 | 2.064 | 2.172 | 2.492 | 2.797 |
| 25 | 1.316 | 1.708 | 1.825 | 2.060 | 2.167 | 2.485 | 2.787 |
| 29 | 1.311 | 1.699 | 1.814 | 2.045 | 2.150 | 2.462 | 2.756 |
| 34 | 1.307 | 1.691 | 1.805 | 2.032 | 2.136 | 2.441 | 2.728 |
| 39 | 1.304 | 1.685 | 1.798 | 2.023 | 2.125 | 2.426 | 2.708 |
| 49 | 1.299 | 1.677 | 1.788 | 2.010 | 2.110 | 2.405 | 2.680 |
| 59 | 1.296 | 1.671 | 1.781 | 2.001 | 2.100 | 2.391 | 2.662 |
| 69 | 1.294 | 1.667 | 1.777 | 1.995 | 2.093 | 2.382 | 2.649 |
| 79 | 1.292 | 1.664 | 1.773 | 1.990 | 2.088 | 2.374 | 2.640 |
| 89 | 1.291 | 1.662 | 1.771 | 1.987 | 2.084 | 2.369 | 2.632 |
| 99 | 1.290 | 1.660 | 1.769 | 1.984 | 2.081 | 2.365 | 2.626 |
| 149 | 1.287 | 1.655 | 1.763 | 1.976 | 2.072 | 2.352 | 2.609 |
| 199 | 1.286 | 1.653 | 1.760 | 1.972 | 2.067 | 2.345 | 2.601 |
| 299 | 1.284 | 1.650 | 1.757 | 1.968 | 2.063 | 2.339 | 2.592 |
| $\infty$ | 1.282 | 1.645 | 1.751 | 1.960 | 2.054 | 2.326 | 2.576 |

## D Fisher- und Beta-Verteilungen

$\alpha$-Quantile $f_{m,n;\alpha}$ der $\mathcal{F}_{m,n}$-Verteilungen mit $m$ Freiheitsgraden im Zähler und $n$ Freiheitsgraden im Nenner. $f_{m,n;\alpha}$ ist der Wert $c > 0$ mit $\mathcal{F}_{m,n}([0, c]) = \alpha$. Mit Hilfe von Bemerkung (9.14) bekommt man die entsprechenden Quantile der Beta-Verteilungen. Der Wert für $n = \infty$ ist der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_{m,n;\alpha} = \chi^2_{m;\alpha}/m$, vgl. Aufgabe 9.12.

### 95%-Quantile $f_{m,n;0.95}$

| $m =$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n = 1$ | 161. | 199. | 216. | 225. | 230. | 234. | 237. | 239. | 241. | 242. |
| 2 | 18.5 | 19.0 | 19.2 | 19.2 | 19.3 | 19.3 | 19.4 | 19.4 | 19.4 | 19.4 |
| 3 | 10.1 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.01 | 8.94 | 8.89 | 8.85 | 8.81 | 8.79 |
| 4 | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 | 5.96 |
| 5 | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.77 | 4.74 |
| 6 | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.10 | 4.06 |
| 7 | 5.59 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 | 3.64 |
| 8 | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.39 | 3.35 |
| 9 | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 | 3.14 |
| 10 | 4.96 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 | 2.98 |
| 11 | 4.84 | 3.98 | 3.59 | 3.36 | 3.20 | 3.09 | 3.01 | 2.95 | 2.90 | 2.85 |
| 12 | 4.75 | 3.89 | 3.49 | 3.26 | 3.11 | 3.00 | 2.91 | 2.85 | 2.80 | 2.75 |
| 13 | 4.67 | 3.81 | 3.41 | 3.18 | 3.03 | 2.92 | 2.83 | 2.77 | 2.71 | 2.67 |
| 14 | 4.60 | 3.74 | 3.34 | 3.11 | 2.96 | 2.85 | 2.76 | 2.70 | 2.65 | 2.60 |
| 15 | 4.54 | 3.68 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.59 | 2.54 |
| 16 | 4.49 | 3.63 | 3.24 | 3.01 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.59 | 2.54 | 2.49 |
| 17 | 4.45 | 3.59 | 3.20 | 2.96 | 2.81 | 2.70 | 2.61 | 2.55 | 2.49 | 2.45 |
| 18 | 4.41 | 3.55 | 3.16 | 2.93 | 2.77 | 2.66 | 2.58 | 2.51 | 2.46 | 2.41 |
| 19 | 4.38 | 3.52 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.63 | 2.54 | 2.48 | 2.42 | 2.38 |
| 20 | 4.35 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.51 | 2.45 | 2.39 | 2.35 |
| 21 | 4.32 | 3.47 | 3.07 | 2.84 | 2.68 | 2.57 | 2.49 | 2.42 | 2.37 | 2.32 |
| 22 | 4.30 | 3.44 | 3.05 | 2.82 | 2.66 | 2.55 | 2.46 | 2.40 | 2.34 | 2.30 |
| 23 | 4.28 | 3.42 | 3.03 | 2.80 | 2.64 | 2.53 | 2.44 | 2.37 | 2.32 | 2.27 |
| 24 | 4.26 | 3.40 | 3.01 | 2.78 | 2.62 | 2.51 | 2.42 | 2.36 | 2.30 | 2.25 |
| 25 | 4.24 | 3.39 | 2.99 | 2.76 | 2.60 | 2.49 | 2.40 | 2.34 | 2.28 | 2.24 |
| 26 | 4.23 | 3.37 | 2.98 | 2.74 | 2.59 | 2.47 | 2.39 | 2.32 | 2.27 | 2.22 |
| 27 | 4.21 | 3.35 | 2.96 | 2.73 | 2.57 | 2.46 | 2.37 | 2.31 | 2.25 | 2.20 |
| 28 | 4.20 | 3.34 | 2.95 | 2.71 | 2.56 | 2.45 | 2.36 | 2.29 | 2.24 | 2.19 |
| 29 | 4.18 | 3.33 | 2.93 | 2.70 | 2.55 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.22 | 2.18 |
| 30 | 4.17 | 3.32 | 2.92 | 2.69 | 2.53 | 2.42 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.16 |
| 35 | 4.12 | 3.27 | 2.87 | 2.64 | 2.49 | 2.37 | 2.29 | 2.22 | 2.16 | 2.11 |
| 40 | 4.08 | 3.23 | 2.84 | 2.61 | 2.45 | 2.34 | 2.25 | 2.18 | 2.12 | 2.08 |
| 45 | 4.06 | 3.20 | 2.81 | 2.58 | 2.42 | 2.31 | 2.22 | 2.15 | 2.10 | 2.05 |
| 50 | 4.03 | 3.18 | 2.79 | 2.56 | 2.40 | 2.29 | 2.20 | 2.13 | 2.07 | 2.03 |
| 60 | 4.00 | 3.15 | 2.76 | 2.53 | 2.37 | 2.25 | 2.17 | 2.10 | 2.04 | 1.99 |
| 70 | 3.98 | 3.13 | 2.74 | 2.50 | 2.35 | 2.23 | 2.14 | 2.07 | 2.02 | 1.97 |
| 80 | 3.96 | 3.11 | 2.72 | 2.49 | 2.33 | 2.21 | 2.13 | 2.06 | 2.00 | 1.95 |
| 90 | 3.95 | 3.10 | 2.71 | 2.47 | 2.32 | 2.20 | 2.11 | 2.04 | 1.99 | 1.94 |
| 100 | 3.94 | 3.09 | 2.70 | 2.46 | 2.31 | 2.19 | 2.10 | 2.03 | 1.97 | 1.93 |
| 150 | 3.90 | 3.06 | 2.66 | 2.43 | 2.27 | 2.16 | 2.07 | 2.00 | 1.94 | 1.89 |
| 200 | 3.89 | 3.04 | 2.65 | 2.42 | 2.26 | 2.14 | 2.06 | 1.98 | 1.93 | 1.88 |
| $\infty$ | 3.84 | 3.00 | 2.60 | 2.37 | 2.21 | 2.10 | 2.01 | 1.94 | 1.88 | 1.83 |