Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2022
Andreas Eberle, Luis Aniello La Rocca

3. Übungsblatt „Einführung in die Statistik"

Abgabe bis Montag 25.4., 16 Uhr, in den Postfächern im Erdgeschoss des Mathematikzentrums (gegenüber der Bibliothek).

---

1. (Ein supereffizienter Schätzer) Es werden n Zufallszahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus dem reellen Intervall $(0, \theta)$ erzeugt, und Sie sollen den Wert von θ schätzen.

a) Geben Sie ein statistisches Modell an, dass das Experiment beschreibt.

b) Zeigen Sie, dass $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}_n$ ein erwartungstreuer Schätzer für θ mit Varianz $\frac{\theta^2}{3n}$ ist.

c) Zeigen Sie, dass $\hat{\theta}_2 = \max_{1 \le i \le n} X_i$ sowohl eine suffiziente Statistik als auch ein Maximum-Likelihood-Schätzer ist. Zeigen Sie weiter, dass dieser die Verteilungsfunktion $F(c) = c^n/\theta^n$ für $0 \le c \le \theta$ hat. Folgern Sie, dass

$$E_\theta[\hat{\theta}_2] \;=\; \frac{n}{n+1}\theta,$$

und berechnen Sie den mittleren quadratischen Fehler des Schätzers.

d) Um einen erwartungstreuen Schätzer zu erhalten, betrachten wir schließlich den korrigierten Schätzer $\hat{\theta}_3 = \frac{n+1}{n}\hat{\theta}_2$. Zeigen Sie

$$\mathrm{MSE}_\theta(\hat{\theta}_3) \;=\; \frac{\theta^2}{n(n+2)} \;\in\; O(n^{-2}).$$

2. (Capture-Recapture-Methode) Ein Ökologe macht sich Sorgen, dass die Population einer bestimmten Schmetterlingsart in einem bestimmten Gebiet stark abgenommen hat. Um dies zu untermauern, führt er ein Capture-Recapture-Experiment mit $\ell = n = 50$ Schmetterlingen durch.

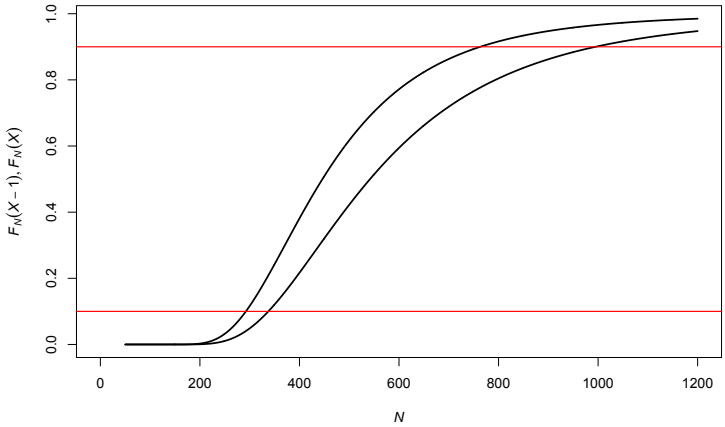
a) Formulieren Sie ein statistisches Modell, und bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{N}$ für die Gesamtzahl N aller Schmetterlinge. Ist für den Biologen eine untere oder eine obere Vertrauensschranke für N von Interesse?

b) Angenommen, er findet in der zweiten Runde $x = 5$ Tiere, die er in der ersten Runde markierte. Berechnen Sie $\hat{N}$, und bestimmen Sie eine 90%-Vertrauensschranke mit Hilfe der folgenden Tabelle mit Werten von $F_N(x) = F_{N,50,50}(x)$:

N	291	292	293	294	295	296	297	298	299
$F_N(5)$	.0973	.0993	.1014	.1035	.1056	.1077	.1098	.1120	.1141
N	991	992	993	994	995	996	997	998	999
$F_N(4)$	.8987	.8990	.8994	.8997	.9000	.9004	.9007	.9010	.9013

Da der Ökologe kein Statistiker ist, bittet er Sie, den Sachverhalt in ein oder zwei Sätzen prägnant zu formulieren.

c) Wie kann man in der folgenden Abbildung die untere bzw. die obere 90%-Vertrauensschranke ablesen?



3. (Populationsgrösse und erwartungstreue Schätzung) Ein Capture-Recapture-Experiment liefere $X \sim \mathrm{Hyp}(N, \ell, n)$ mit bekannten Parametern $\ell, n \geq 1$ und unbekanntem Parameter $N \geq \max(\ell, n)$.

a) Begründen Sie, dass <u>kein</u> Schätzer der Form $\hat{N} = h(X)$ mit einer reellwertigen Funktion h auf $\{0, 1, \ldots, \min(\ell, n)\}$ den Parameter N erwartungstreu schätzen kann.

b) Bestimmen Sie den Bias des Schätzers $\hat{N} := (\ell + 1)(n + 1)/(X + 1)$, und zeigen Sie, dass stets $\mathrm{Bias}_N(\hat{N}) \leq 1$.

4. (Ein Test auf Zufälligkeit) Daniela Düsentrieb hat einen neuen Zufallsgenerator entwickelt und möchte Ihnen diesen schmackhaft machen. Zur Illustration präsentiert sie Ihnen eine "rein zufällige" Sequenz $\omega \in \{0, 1\}^{100}$ (zeilenweise zu lesen):

1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0

Testen Sie die Nullhypothese, dass diese Sequenz rein zufällig erzeugt wurde, auf dem Niveau $\alpha = 5\%$, indem Sie für die Teststatistik $T(\omega) = \#\{i < n : \omega_i \neq \omega_{i+1}\}$ einen zweiseitigen P-Wert berechnen. Verwenden Sie dafür folgende Tabelle der Binomialverteilungsfunktion $F_{99,0.5}$ (auf vier Nachkommastellen gerundet):

x	35	36	37	38	39	40	41	42
$F_{99,0.5}(x)$	0.0023	0.0043	0.0077	0.0133	0.0219	0.0350	0.0537	0.0795

Beurteilen Sie auch folgende Sequenz ω, ohne eine andere Tabelle hinzuzuziehen:

1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1