Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2022
Andreas Eberle, Luis Aniello La Rocca

1. Übungsblatt „Einführung in die Statistik"

Abgabe bis Montag 11.4., 12 Uhr, in den Postfächern im Erdgeschoss des Mathematikzentrums (gegenüber der Bibliothek).

---

1. (Mineralwasser oder Leitungswasser?)

a) Wir führen den Mineralwassertest mit acht Gläsern durch, von denen jeweils vier Mineral- bzw. Leitungswasser enthalten. Zeigen Sie, dass wir die Nullhypothese („die Testperson schmeckt keinen Unterschied") nur dann signifikant zum Niveau 5 % verwerfen können, wenn die Testperson alle Proben richtig zuordnet.

b) Um der Testperson noch eine Chance zu geben, wenn sie nur drei der vier Gläser mit Mineralwasser richtig erkennt, könnte man den Test wie folgt verfeinern: Wir wiederholen das Basisexperiment mit acht Gläsern so oft, bis erstmalig die Anzahl x korrekt bestimmter Mineralwasserproben von 3 abweicht. Die Nullhypothese verwerfen wir genau dann, wenn bei diesem letzten Durchgang $x = 4$ gilt. Angenommen, die Nullhypothese trifft zu. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird sie verworfen? Und wie viele Gläser Wasser muss die Testperson unter der Nullhypothese im Mittel probieren?

2. (Wine-Tasting Gentlemen)

a) Herr Meier behauptet, er könne bei einem bestimmten Wein zuverlässig sagen, ob er vom Jahrgang A oder B stammt. Um dies nachzuweisen, einigt man sich auf ein Experiment, in welchem ihm n_A Gläschen vom Jahrgang A und n_B Gläschen vom Jahrgang B in zufälliger Reifenfolge präsentiert werden.

Wie sollte man n_A und n_B wählen, so dass man

- im Falle einer fehlerfreien Zuordnung Herrn Meiers Behauptung mit einer Sicherheit von 95% bestätigen kann und
- die Gesamtzahl $n_A + n_B$ möglichst klein ist?

b) Herr Müller behauptet, er schmecke ebenfalls den Unterschied zwischen diesen (oder anderen) zwei Jahrgängen, könne allerdings nicht den genauen Jahrgang angeben.

Wie sollte man n_A und n_B für Herrn Müller wählen, so dass die gleichen Ziele wie in Teil a) erreicht werden?

3. (Verteilungsfunktionen und Simulation von reellwertigen Zufallsvariablen) Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Verteilungsfunktion F. Die *Quantilsfunktion* $G : (0,1) \to \mathbb{R}$ ist definiert als *„linksstetige verallgemeinerte Inverse"* von F, d.h. für $u \in (0,1)$ ist

$$G(u) \;:=\; \inf\{c \in \mathbb{R} : F(c) \geq u\} \;=\; \sup\{c \in \mathbb{R} : F(c) < u\}.$$

a) Sei $\mathcal{U}_{(0,1)}$ die Gleichverteilung auf $(0,1)$. Wie sehen die Graphen von F und G aus, falls die Verteilung von X gleich $\frac{1}{2}\mathcal{U}_{(0,1)} + \frac{1}{2}\delta_2$ ist? (Zur Erinnerung: $\delta_a, a \in \mathbb{R}$, ist das Diracmaß auf a, d.h. $\delta_a(\{a\}) = 1$.)

b) Zeigen Sie allgemein, dass G eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum

$$((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \mathcal{U}_{(0,1)})$$

ist, die dieselbe Verteilung wie X unter P hat. *(Ein Element $u \in (0,1)$ repräsentiert z.B. eine vom Computer erzeugte „Zufallszahl". Die Transformation $u \mapsto G(u)$ liefert eine Möglichkeit, Stichproben von X auf dem Computer zu simulieren.)*

4. (Verteilungs- und Quantilfunktionen II) Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen Verteilungsfunktionen sind, und berechnen Sie jeweils die Quantilsfunktion G.

a) $F_1(x) \;=\; \frac{e^x}{1+e^x}, \quad F_2(x) \;=\; \exp(-\exp(-x)), \quad F_3(x) \;=\; \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}.$

b) $F_4(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ 1 - (1+x^2)^{-\gamma/2} & \text{für } x \geq 0, \end{cases}, \quad \text{wobei } \gamma > 0.$

5. (Verteilungs- und Quantilfunktionen III) Sei Y eine reellwertige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und Quantilsfunktion G.

a) Drücken Sie die Verteilungsfunktionen F_i und die Quantilsfunktionen G_i der folgenden Zufallsvariablen X_i durch F und G aus:

$$X_1 \;=\; \lceil Y \rceil, \quad X_2 \;=\; b^Y \text{ mit } b > 1, \quad X_3 \;=\; \log_b(Y) \text{ mit } b > 1,$$

wobei wir im letzten Fall $Y > 0$ voraussetzen.

b) Angenommen, die Verteilung von Y hat eine stetige Dichtefunktion f. Bestimmen Sie in diesem Fall die Dichtefunktionen von X_2 und X_3.