Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2023
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

Klausur „Algorithmische Mathematik II"

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Studiengang:	

Wichtige Hinweise:

- **Es sind keine eigenen Unterlagen, Handys, Taschenrechner u.ä. zugelassen!**
- Die Klausur enthält 3 Aufgaben, die Sie *alle* bearbeiten sollten.
- Pro Aufgabe können maximal 32 Punkte erreicht werden.
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Bitte den Studierendenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereithalten.
- Abgabe bis 11.15 Uhr.

Viel Erfolg!

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	**Summe**	**Note**
Punkte					

1. (Zufallsvariablen und Gesetz der großen Zahlen; 32 Punkte)

Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ eine abzählbare Teilmenge der reellen Zahlen.

a) Geben Sie eine kurze, aber vollständige Definition der folgenden Begriffe: *[11 Punkte]*

   (i) Wahrscheinlichkeitsraum,

   (ii) Zufallsvariable X mit Werten in S,

   (iii) Erwartungswert von X,

   (iv) Varianz von X.

b) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$. *[9 Punkte]*

   (i) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz für eine Zufallsvariable X mit $\mathbb{P}[X = 1] = p$ und $\mathbb{P}[X = 0] = 1 - p$.

   (ii) Zeigen Sie: Für eine Zufallsvariable $Y \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ gilt

$$\mathbb{E}[Y] = np \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}[Y] = np(1-p)\,.$$

c) Sei $Z : \Omega \to S$ eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Erwartungswert $m \in \mathbb{R}$ und Varianz $v \in (0, \infty)$. Beweisen Sie die Ungleichung *[4 Punkte]*

$$\mathbb{P}\left[|Z - m| \geq c\right] \;\leq\; \frac{v}{c^2} \qquad \text{für alle } c \in (0, \infty).$$

d) Seien $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to S$ unkorrelierte Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Erwartungswert $m \in \mathbb{R}$ und Varianz $v \in (0, \infty)$. Formulieren und beweisen Sie in diesem Rahmen eine Version des Gesetzes der großen Zahlen. *[8 Punkte]*

2. (Stochastische Modelle und Simulationsverfahren; 32 Punkte)

a) 90% der in einer Radarstation eintreffenden Signale sind mit einer Störung überlagerte Nutzsignale, und 10% sind reine Störungen. Wird ein gestörtes Nutzsignal empfangen, zeigt die Anlage mit Wahrscheinlichkeit 0,98 die Ankunft eines Nutzsignals an, und ansonsten die Ankunft eines Störsignals. Beim Empfang einer reinen Störung wird mit Wahrscheinlichkeit 0,1 fälschlicherweise die Ankunft eines Nutzsignals angezeigt. [*16 Punkte*]

(i) Formulieren Sie ein geeignetes stochastisches Modell.

(ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein als Störsignal angezeigtes Signal tatsächlich ein (störungsüberlagertes) Nutzsignal?

b) Sei u eine Stichprobe von der Gleichverteilung auf dem reellen Intervall $(0,1)$. Wie können Sie aus u Stichproben von den folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen erzeugen? (ohne Beweis) [*8 Punkte*]

(i) Gleichverteilung auf einer endlichen Menge S mit n Elementen $x_1, \ldots, x_n$.

(ii) Bernoulli-Verteilung mit Parameter $p = 1/3$.

(iii) Geometrische Verteilung mit Parameter $p = 1/7$.

c) Sei $u_1, u_2, u_3, \ldots$ eine Folge von unabhängigen Stichproben von der Gleichverteilung auf dem reellen Intervall $(0,1)$. Geben Sie ohne Beweis einen (natürlich möglichst effizienten) Algorithmus an, der daraus eine Stichprobe von der Wahrscheinlichkeitsverteilung μ auf $\mathbb{N}$ mit den Gewichten [*8 Punkte*]

$$\mu\,[\{n\}] \;=\; \frac{1}{\mathcal{Z}} |\cos(\sqrt{n})| \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^n$$

erzeugt. Dabei ist $\mathcal{Z}$ eine unbekannte Normierungskonstante.

3. (Newton-Verfahren; 32 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.

a) Geben Sie den Algorithmus des Newton-Verfahrens zur Approximation einer Nullstelle x^* der Funktion f an (nur schematisch in Pseudocode - es wird kein lauffähiges Programm erwartet). Der Algorithmus sollte abbrechen, wenn die Iterationsfolge $x^{(k)}$ ein vorgegebenes Intervall $I = (-M, M)$, $M \in (0, \infty)$, verlässt (*overflow*), oder wenn $|f(x^{(k)})|$ eine vorgegebene Schranke $\varepsilon > 0$ unterschreitet. [*8 Punkte*]

b) (i) Was bedeutet *"quadratische Konvergenz des Newton-Verfahrens"* (Definition)? [*8 Punkte*]

(ii) Geben Sie eine Folge reeller Zahlen an, die quadratisch, aber nicht mit höherer Ordnung gegen Null konvergiert (mit Beweis).

c) Sei $x^* \in I$ mit $f(x^*) = 0$. Es gelte $f'(x) > 0$ für alle $x \in [-M, M]$. [*10 Punkte*]

(i) Zeigen Sie: Für $k \geq 0$ mit $x^{(k)} \in I$ gilt

$$x^{(k+1)} - x^* = \frac{1}{f'(x^{(k)})} \cdot \int_{x^{(k)}}^{x^*} \big(f'(y) - f'(x^{(k)})\big) \, dy.$$

(ii) Folgern Sie: Existiert ein $L \in (0, \infty)$ mit

$$|f'(y) - f'(x)| \leq L \cdot |y - x| \qquad \text{für alle } x, y \in I,$$

dann konvergiert die Iterationsfolge $x^{(k)}$ für $x^{(0)}$ nahe x^* quadratisch gegen x^*.

d) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass das Newton-Verfahren im Allgemeinen nicht global konvergiert. [*6 Punkte*]