Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2023
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

Klausur „Algorithmische Mathematik II"

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Studiengang:	

Wichtige Hinweise:

- **Es sind keine eigenen Unterlagen, Handys, Taschenrechner u.ä. zugelassen!**
- Die Klausur enthält 4 Aufgaben (2 zur Stochastik, 2 zur Numerik), von denen Sie 3 bearbeiten sollten. Bitte streichen Sie die nicht bearbeitete Aufgabe, da nur 3 Aufgaben bei der Korrektur berücksichtigt werden.
- Pro Aufgabe können maximal 40 Punkte erreicht werden.
- Nehmen Sie sich am Anfang etwas Zeit, um alle Aufgaben sorgfältig durchzulesen und zu entscheiden, welche Aufgaben Sie bearbeiten.
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Bitte den Studierendenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereithalten.
- Abgabe bis 11.15 Uhr.

Viel Erfolg!

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	**Summe**	**Note**
Punkte						

1. (Zufallsvariablen)

a) Definieren Sie die folgenden Begriffe: *[11 P.]*

(i) Wahrscheinlichkeitsraum,

(ii) diskrete Zufallsvariable,

(iii) Verteilung und Massenfunktion einer diskreten Zufallsvariablen.

b) Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}[X_i = 1] = \frac{1}{3}$ und $\mathbb{P}[X_i = 0] = \frac{2}{3}$. Geben Sie (ohne Beweis) die Massenfunktionen der Verteilungen folgender Zufallsvariablen an: *[8]*

(i) $S = \sum_{i=1}^{4} X_i$,

(ii) $D = X_1 - X_2$,

(iii) $T = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = 0\}$,

(iv) $P = \prod_{i=1}^{4}(2X_i - 1)$.

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte der Zufallsvariablen S, D, T und P. Begründen Sie dabei die einzelnen Rechenschritte. *[12]*

d) Berechnen Sie die Varianzen von S und P (mit Begründung der Rechenschritte). *[9]*

Lösung:

a) (i) Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ besteht aus:

- ∗ Einer nichtleeren Menge Ω,
- ∗ Einer Menge $\mathcal{A}$ von Teilmengen von Ω mit
  - · $\emptyset \in \mathcal{A}$,
  - · $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$,
  - · $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$,
- ∗ Einer Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ mit
  - · $\mathbb{P}[\Omega] = 1$,
  - · $A_1, A_2, \dots$ disjunkt $\Rightarrow \mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$.

(ii) Eine diskrete Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ist eine Abbildung $X : \Omega \to S$, S abzählbar, mit $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\} \in \mathcal{A}$ für alle $a \in S$.

(iii) Die Verteilung einer diskreten Zufallsvariablen X wie in *(ii)* ist die durch $\mu_X[B] = \mathbb{P}[X \in B]$ für alle $B \subseteq S$ definierte Wahrscheinlichkeitsverteilung auf S. Die Massenfunktion von X ist $p_X(a) = \mathbb{P}[X = a]$, $a \in S$.

b) (i) $S \sim \mathrm{Bin}(4, 1/3)$, d.h. $p_S(k) = \binom{4}{k}(1/3)^k(2/3)^{4-k}$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Dies ergibt $p_S(0) = 16(1/3)^4$, $p_S(1) = 32(1/3)^4$, $p_S(2) = 24(1/3)^4$, $p_S(3) = 8(1/3)^4$, $p_S(4) = (1/3)^4$.

(ii) Es gilt $p_D(1) = \mathbb{P}[X_1 = 1, X_2 = 0] = 2/9$, $p_D(-1) = \mathbb{P}[X_1 = 0, X_2 = 1] = 2/9$ und $p_D(0) = 1 - (p_D(1) + p_D(-1)) = 5/9$.

(iii) $T \sim \text{Geom}(p)$, d.h. $p_T(n) = \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^{n-1}$ für $n = 1, 2, \ldots$.

(iv) Es gilt $p_P(1) = \mathbb{P}[S \text{ gerade}] = p_S(0) + p_S(2) + p_S(4) = 41/81$ und $p_P(-1) = \mathbb{P}[S \text{ ungerade}] = p_S(1) + p_S(3) = 40/81$.

c) (i)

$$\mathbb{E}[S] \;=\; \sum_{i=1}^{4} \mathbb{E}[X_i] \;=\; 4\mathbb{E}[X_1] \;=\; 4\Big(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0\Big) \;=\; \frac{4}{3},$$

wobei wir die Linearität des Erwartungswertes, die identische Verteilung der X_i und die Definition des Erwartungswerts einer diskreten Zufallsvariablen benutzt haben.

(ii)

$$\mathbb{E}[D] \;=\; \mathbb{E}[X_1] - \mathbb{E}[X_2] \;=\; 0,$$

wobei wir die Linearität des Erwartungswertes und die identische Verteilung der X_i benutzt haben.

(iii)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T] \;&=\; \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} I_{T>n}\right] \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[T > n] \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[X_1 = \cdots = X_n = 0] \\ &=\; \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \;=\; \frac{1}{1 - 1/3} \;=\; \frac{3}{2},\end{aligned}$$

wobei wir T als Summe geschrieben haben, die Linearität von $\mathbb{E}$, die Unabhängigkeit der X_i und die geometrische Reihe benutzt haben.

(iv)

$$\mathbb{E}[P] \;=\; \prod_{i=1}^{4} \mathbb{E}[2X_i - 1] \;=\; (2\mathbb{E}[X_1] - 1)^4 \;=\; (-1/3)^4 \;=\; \frac{1}{81},$$

wobei wir die Unabhängigkeit der X_i und die Linearität von $\mathbb{E}$ benutzt haben.

d) Da die X_i unabhängig sind, sind sie auch unkorreliert. Zusammen mit der identischen Verteilung der X_i gilt

$$Var[S] \;=\; \sum_{i=1}^{4} Var[X_i] \;=\; \sum_{i=1}^{4} Var[X_1].$$

Da $X_1^2 = X_1$, ist

$$Var[X_1] \;=\; \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1]^2 \;=\; \mathbb{E}[X_1] - \mathbb{E}[X_1]^2 \;=\; \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \;=\; \frac{2}{9}.$$

Damit erhalten wir $Var[S] = 8/9$.

Nach der Definition der Varianz und da $P^2 = 1$, gilt

$$Var[P] \;=\; \mathbb{E}[P^2] - \mathbb{E}[P]^2 \;=\; 1 - \mathbb{E}[P]^2 \;=\; 1 - \frac{1}{(81)^2}.$$

2. (Markov-Ketten)

Sei S eine endliche Menge.

a) Definieren Sie die folgenden Begriffe: *[10 P.]*

(i) Stochastische Matrix $P \in \mathbb{R}^{S\times S}$,

(ii) Gleichgewichtsverteilung von P,

(iii) Detailed Balance,

(iv) zeitlich homogene Markov-Kette mit Übergangsmatrix P.

b) Beweisen oder widerlegen Sie (mit vollständiger Argumentation): *[12]*

(i) Jede Gleichgewichtsverteilung erfüllt die Detailed Balance Bedingung.

(ii) Jede Wahrscheinlichkeitsverteilung, die die Detailed Balance Bedingung erfüllt, ist ein Gleichgewicht.

(iii) Ist μ eine Gleichgewichtsverteilung von P und $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix P und Startverteilung μ, dann ist die Verteilung von X_n für alle $n \in \mathbb{N}$ gleich μ.

c) Sei $S = \{0, 1\}$ und $a \in [0, 1]$. Bestimmen Sie alle Gleichgewichtsverteilungen der Markov-Kette mit Übergangswahrscheinlichkeiten $P(0, 1) = a$ und $P(1, 0) = a/2$. *[9]*

d) Sei B_n die Anzahl der Besuche der Markov-Kette aus c) im Zustand 1. Was können Sie über das asymptotische Verhalten von B_n für $n \to \infty$ aussagen? Formulieren Sie präzise! Aussagen aus der Vorlesung können ohne Beweis vorausgesetzt werden. *[9]*

Lösung:

a) (i) $P = (P(x, y))_{x,y\in S}$ heißt Stochastische Matrix, falls $P(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in S$ und $\sum_{y\in S} P(x, y) = 1$ für alle $x \in S$.

(ii) Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung μ auf S mit Gewichten $\mu(x)$, $x \in S$, heißt Gleichgewichtsverteilung von P, falls $\mu P = \mu$, d.h. falls $\mu(y) = \sum_{x\in S} \mu(x)P(x, y)$ für alle $y \in S$.

(iii) P erfüllt Detailed Balance bezüglich μ, falls $\mu(x)P(x, y) = \mu(y)P(y, x)$ für alle $x, y \in S$.

(iv) Eine Folge $X_0, X_1, \ldots$ von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Werten in S heißt zeitlich homogene Markov-Kette mit Zustandsraum S und Übergangsmatrix P, falls für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_0, \ldots, x_n, y \in S$ mit $\mathbb{P}[X_0 = x_0, \ldots X_n = x_n] \neq 0$ gilt

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = y | X_0 = x_0, \ldots X_n = x_n] \;=\; P(x_n, y).$$

b) Beweisen oder widerlegen Sie (mit vollständiger Argumentation):

(i) Falsch, da zum Beispiel für $S = \{0,1,2\}$, $P(0,1) = P(1,2) = P(2,0) = 1$, $\mu = \text{Unif}(S)$ ein Gleichgewicht ist:

$$(\mu P)(y) \;=\; \sum_{x \in S} \mu(x) P(x,y) \;=\; \frac{1}{3} \sum_{x \in S} P(x,y) \;=\; \frac{1}{3} \;=\; \mu(y)$$

für alle $y \in S$, ABER $\mu(0)P(0,1) = 1/3 \neq 0 = \mu(1)P(1,0)$.

(i) Wahr, da für alle $y \in S$

$$(\mu P)(y) \;=\; \sum_{x \in S} \mu(x) P(x,y) \;=\; \sum_{x \in S} \mu(y) P(y,x) \;=\; \mu(y),$$

wobei wir Detailed Balance und die Eigenschaft der stochastischen Matrix P benutzt haben.

(iii) Wahr, durch Induktion: Für $n = 0$ gilt $\mathbb{P}[X_n = y] = \mu(y)$ für alle $y \in S$, und

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_{n+1} = y] \;&=\; \sum_{x \in S} \mathbb{P}[X_{n+1} = y | X_n = x] \mathbb{P}[X_n = x] \;=\; \sum_{x \in S} P(x,y)\mu(x) \\ &=\; (\mu P)(y) \;=\; \mu(y), \end{aligned}$$

wobei wir die Induktionsannahme und, dass μ ein Gleichgewicht ist, benutzt haben.

c) Eine WV μ ist ein Gleichgewicht genau dann, wenn

$$\begin{aligned} & \mu(0)P(0,1) + \mu(1)P(1,1) \;=\; \mu(1) \\ \Leftrightarrow\; & \mu(0)a + \mu(1)(1 - a/2) \;=\; \mu(1) \\ \Leftrightarrow\; & \mu(0)a \;=\; \mu(1)a/2. \end{aligned}$$

Für $a = 0$ ist jede WV auf S ein Gleichgewicht von P.
Für $a > 0$ ist μ genau dann eine Gleichgewichtsverteilung, wenn $\mu(0) + \mu(1) = 1$ und $\mu(0) = \mu(1)/2$. Also ist $\mu = (1/3, 2/3)$ eindeutige Gleichgewichtsverteilung.

d) Es ist

$$B_n \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} I_{\{X_n = 1\}}.$$

Für $a = 0$ gilt $B_n = nI_{\{X_0=1\}}$. Für $a \neq 0$ ist die Markov-Kette irreduzibel und aperiodisch. Daher gilt eine Minorisierungsbedingung und nach dem GGZ für schwach korrelierte Zufallsvariablen folgt

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left[\left| \frac{1}{n} B_n - \mu(1) \right| > \varepsilon \right] \;=\; 0$$

für alle $\varepsilon > 0$, d.h. $B_n \sim n\mu(1)$.

3. (Iterationsverfahren)

Seien $b \in \mathbb{R}^d$ und $A = (a_{ij})_{i,j=1}^d \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mit $a_{ii} \neq 0$ für alle $i \in \{1,\dots,d\}$.

a) Wie sind die folgenden Objekte definiert? *[6 P.]*

(i) ℓ^p/ℓ^p Operatornorm $\|A\|_{p,p}$ für $p \in [1,\infty]$,

(ii) Spektralradius $\varrho(A)$,

(iii) ℓ^p-Kondition $\kappa_p(A)$.

b) Zeigen Sie: *[12]*

(i) $\|A\|_{\infty,\infty} = \max_{i=1,\dots,d} \sum_{j=1}^d |a_{ij}|$,

(ii) $\|A\|_{2,2} = \sqrt{\varrho(A^T A)}$.

c) Geben Sie den Algorithmus des Gauß-Seidel-Verfahrens zur näherungsweisen Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ an. Stellen Sie den Iterationsschritt dieses Verfahrens in der Fixpunktform

$$x^{(k+1)} \;=\; Tx^{(k)} + f$$

mit einer Matrix $T \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und $f \in \mathbb{R}^d$ dar. *[9]*

d) Beweisen Sie, dass das Gauß-Seidel-Verfahren bezüglich der Maximumsnorm monoton konvergiert, falls A strikt diagonaldominant ist. *[13]*

Lösung:

a) Wie sind die folgenden Objekte definiert?

(i) $\|A\|_{p,p} = \sup_{v\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \frac{\|Av\|_p}{\|v\|_p}$,

(ii) $\varrho(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von A$\}$,

(iii) $\kappa_p(A) = \|A\|_{p,p} \cdot \|A^{-1}\|_{p,p}$ falls A invertierbar ist, sonst $= \infty$).

b) (i) Es gilt $\|A\|_{\infty,\infty} = \sup_{v\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \frac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty}$. Da $(Av)_i = \sum_{j=1}^d a_{ij}v_j$, ist

$$\|Av\|_\infty \;=\; \max_{i=1,\dots,d}\left|\sum_{j=1}^d a_{ij}v_j\right| \;\le\; \max_{i=1,\dots,d}\sum_{j=1}^d |a_{ij}||v_j| \;\le\; \|v\|_\infty \max_{i=1,\dots,d}\sum_{j=1}^d |a_{ij}|,$$

so dass $\|A\|_{\infty,\infty} \le \max_{i=1,\dots,d}\sum_{j=1}^d |a_{ij}|$.

Andererseits, für $v_j = \mathrm{sgn}(a_{ij})$ gilt $\|v\|_\infty = 1$ und $\sum_{j=1}^d a_{ij}v_j = \sum_{j=1}^d |a_{ij}|$ so dass $\|Av\|_\infty \ge \max_{i=1,\dots,d}\sum_{j=1}^d |a_{ij}|$.

(ii) Es gilt $\|Av\|_2^2 = \langle Av, Av\rangle_{\ell^2} = \langle v, A^T Av\rangle_{\ell^2}$ so dass

$$\|A\|_{2,2}^2 \;=\; \sup_{v\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \frac{\|Av\|_2^2}{\|v\|_2^2} \;=\; \sup_{v\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \frac{\langle v, A^T Av\rangle_{\ell^2}}{\langle v, v\rangle_{\ell^2}} \;=\; \varrho(A^T A).$$

c) **Algorithmus:**
Input: A, b und Startwert $x^{(0)} \in \mathbb{R}^d$
Output: Iterationsfolge $x^{(k)} \in \mathbb{R}^d$
For $k = 0, 1, \ldots$
For $i = 1, \ldots, d$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)}\Big).$$

Mit der Aufteilung $A = D - L - R$ ist dies in Matrixform

$$Dx^{(k+1)} = b + Lx^{(k+1)} + Rx^{(k)}.$$

bzw. äquivalent

$$x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Rx^{(k)} + (D-L)^{-1}b.$$

Dies entspricht der Fixpunktform mit $T = (D-L)^{-1}R$ und $f = (D-L)^{-1}b$.

d) Da A strikt diagonaldominant ist, existiert $c < 1$ so dass für alle i gilt $\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{j\neq i}|a_{ij}| \leq c$. Sei $y = Tx$. Dann

$$y_i = -\frac{1}{a_{ii}}\Big(\sum_{j<i} a_{ij} y_j + \sum_{j>i} a_{ij} x_j\Big).$$

Per Induktion gilt für ein $c < 1$ und alle i

$$|y_i| \leq c\|x\|_\infty.$$

Für $i = 1$ gilt es aufgrund der Dreiecksungleichung und der strikten Diagonaldominanz von A. Falls die Ungleichung für alle $j < i$ gilt, dann folgt auch

$$\begin{aligned} |y_i| &\leq \frac{1}{|a_{ii}|}\Big(\sum_{j<i}|a_{ij}||y_j| + \sum_{j>i}|a_{ij}||x_j|\Big) \leq \frac{1}{|a_{ii}|}\Big(\sum_{j<i}|a_{ij}|c\|x\|_\infty + \sum_{j>i}|a_{ij}|\|x\|_\infty\Big) \\ &\leq \frac{\|x\|_\infty}{|a_{ii}|}\sum_{j\neq i}|a_{ij}| \leq c\|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Nun gilt $\|Tx\|_\infty = \|y\|_\infty \leq c\|x\|_\infty$ so dass T eine Kontraktion bzgl. der Maximumsnorm ist. Insbesondere gilt

$$\|x^{(k+1)} - x^*\|_\infty = \|Tx^{(k)} - Tx^*\|_\infty \leq c\|x^{(k)} - x^*\|_\infty.$$

4. (Interpolation und Quadratur)

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ und die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

a) Geben Sie das Lagrange-Interpolationspolynom p *explizit* an, und zwar [*9 P.*]

   (i) in der Lagrange-Darstellung,

   (ii) in der Newton-Darstellung.

b) Zur numerischen Berechnung des Integrals

$$I[f] \;=\; \int_0^2 f(x)\,dx$$

betrachten wir eine Quadraturformel

$$Q[f] \;=\; \sum_{i=0}^{2} w_i f(x_i)$$

mit Gewichten $w_i \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass Q genau dann Exaktheitsgrad ≥ 2 hat, wenn

$$w_i \;=\; \int_0^2 L_i(x)\,dx$$

für $i = 0, 1, 2$ gilt, wobei L_i das i-te Lagrange-Grundpolynom ist. [*8*]

c) Zeigen Sie: Für die Stützstellen x_0, x_1, x_2 von oben ergibt sich $w_0 = \frac{1}{3}$, $w_1 = \frac{4}{3}$ und $w_2 = \frac{1}{3}$. [*6*]

d) Welchen maximalen Exaktheitsgrad hat Q in diesem Fall? [*9*]

e) Geben Sie ein zusammengesetztes Quadraturverfahren an, dass auf dieser Quadraturformel basiert. Was bedeutet es, dass dieses Verfahren die Konsistenzordnung s hat? Welche maximale Konsistenzordnung hat das von Ihnen angegebene Verfahren? *(ohne Beweis)* [*8*]

Lösung:

a) (i) Da

$$L_i(x) \;=\; \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

gilt

$$L_0(x) \;=\; \frac{(x-1)(x-2)}{2}, \quad L_1(x) \;=\; \frac{x(x-2)}{-1}, \quad L_2(x) \;=\; \frac{x(x-1)}{2},$$

womit $p(x) = e^{-0}L_0(x) + e^{-1}L_1(x) + e^{-4}L_2(x)$.

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned}
f[x_0] &= 1 \\
f[x_0,x_1] &= \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = e^{-1}-1, \quad f[x_1,x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} = e^{-4}-e^{-1}, \\
f[x_0,x_1,x_2] &= \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{e^{-4}-2e^{-1}+1}{2},
\end{aligned}$$

womit $p(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$.

b) Q hat genau dann Exaktheitsgrad ≥ 2, wenn $Q[p] = I[p]$ für alle $p \in \Pi_2$. Da die Lagrange-Grundpolynome eine Basis von Π_2 bilden, gilt dies wegen Linearität von Q und I genau dann, wenn $Q[L_i] = I[L_i]$ für alle $i = 0,1,2$. Während einserseits $Q[L_i] = \sum_{j=0}^{2} w_j L_i(x_j) = w_i$, da $L_i(x_j) = \delta_{ij}$, ist andererseits $I[L_i] = \int_0^2 L_i(x)\,dx$. Dies zeigt die Behauptung.

c) Es gilt $L_0(x) = (x-1)(x-2)/2 = (x^2-3x+2)/2$, also

$$w_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 (x^2-3x+2)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{8}{3}-6+4\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Aus Symmetriegründen ist $w_2 = w_0$. Zudem gilt $L_1(x) = -x(x-2)$, also

$$w_1 = -\int_0^2 (x^2-2x)\,dx = -\frac{8}{3}+4 = \frac{4}{3}.$$

d) Es gilt

$$\begin{aligned}
I[x^3] &= \frac{2^4-0^4}{4} = 4 = \frac{1}{3}0^3 + \frac{4}{3}1^3 + \frac{1}{3}2^3 = Q[x^3], \\
I[x^4] &= \frac{2^5-0^5}{5} = \frac{32}{5} \neq \frac{20}{3} = \frac{1}{3}0^4 + \frac{4}{3}1^4 + \frac{1}{3}2^4 = Q[x^4].
\end{aligned}$$

Zusammen mit b) werden alle Polynome von Grad ≤ 3 exakt integriert, jedoch nicht alle Polynome von Grad ≤ 4. Also ist der maximale Exaktheitsgrad $= 3$.

e) Zusammengesetztes Verfahren: Sei $n \in \mathbb{N}$, $h = 2/n$, $x_i = ih = 2i/n$ für $i = 0,\ldots,n$,

$$\begin{aligned}
Q_n[f] &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\big(\frac{1}{3}f(x_i) + \frac{4}{3}f(x_i+h/2) + \frac{1}{3}f(x_i+h)\big) \\
&= \frac{1}{n}\big(\frac{1}{3}f(0) + \frac{4}{3}f(h/2) + \frac{2}{3}f(h) + \frac{4}{3}f(3h/2) + \cdots + \frac{2}{3}f(2-h) + \frac{4}{3}f(2-h/2) + \frac{1}{3}f(2)\big).
\end{aligned}$$

Das Verfahren hat Konsistenzordnung $s \geq 0$, falls $|Q_n[f] - I[f]| \in O(n^{-s}) = O(h^s)$ für alle $f \in C^s([a,b])$. Das angegebene Verfahren ist das Simpson-Verfahren, und dieses hat Konsistenzordnung 4, siehe Beweis im Vorlesungsskript.