Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2023
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

Klausur „Algorithmische Mathematik II"

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Studiengang:	

Wichtige Hinweise:

- **Es sind keine eigenen Unterlagen, Handys, Taschenrechner u.ä. zugelassen!**
- Die Klausur enthält 4 Aufgaben (2 zur Stochastik, 2 zur Numerik), von denen Sie 3 bearbeiten sollten. Bitte streichen Sie die nicht bearbeitete Aufgabe, da nur 3 Aufgaben bei der Korrektur berücksichtigt werden.
- Pro Aufgabe können maximal 40 Punkte erreicht werden.
- Nehmen Sie sich am Anfang etwas Zeit, um alle Aufgaben sorgfältig durchzulesen und zu entscheiden, welche Aufgaben Sie bearbeiten.
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Bitte den Studierendenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereithalten.
- Abgabe bis 11.15 Uhr.

Viel Erfolg!

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	**Summe**	**Note**
Punkte						

1. (Zufallsvariablen)

a) Definieren Sie die folgenden Begriffe: *[11 P.]*

(i) Wahrscheinlichkeitsraum,

(ii) diskrete Zufallsvariable,

(iii) Verteilung und Massenfunktion einer diskreten Zufallsvariablen.

b) Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}[X_i = 1] = \frac{1}{3}$ und $\mathbb{P}[X_i = 0] = \frac{2}{3}$. Geben Sie (ohne Beweis) die Massenfunktionen der Verteilungen folgender Zufallsvariablen an: *[8]*

(i) $S = \sum_{i=1}^{4} X_i$,

(ii) $D = X_1 - X_2$,

(iii) $T = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = 0\}$,

(iv) $P = \prod_{i=1}^{4}(2X_i - 1)$.

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte der Zufallsvariablen S, D, T und P. Begründen Sie dabei die einzelnen Rechenschritte. *[12]*

d) Berechnen Sie die Varianzen von S und P (mit Begründung der Rechenschritte). *[9]*

2. (Markov-Ketten)

Sei S eine endliche Menge.

a) Definieren Sie die folgenden Begriffe: *[10 P.]*

   (i) Stochastische Matrix $P \in \mathbb{R}^{S \times S}$,

   (ii) Gleichgewichtsverteilung von P,

   (iii) Detailed Balance,

   (iv) zeitlich homogene Markov-Kette mit Übergangsmatrix P.

b) Beweisen oder widerlegen Sie (mit vollständiger Argumentation): *[12]*

   (i) Jede Gleichgewichtsverteilung erfüllt die Detailed Balance Bedingung.

   (ii) Jede Wahrscheinlichkeitsverteilung, die die Detailed Balance Bedingung erfüllt, ist ein Gleichgewicht.

   (iii) Ist μ eine Gleichgewichtsverteilung von P und $(X_n)_{n \geq 0}$ eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix P und Startverteilung μ, dann ist die Verteilung von X_n für alle $n \in \mathbb{N}$ gleich μ.

c) Sei $S = \{0, 1\}$ und $a \in [0, 1]$. Bestimmen Sie alle Gleichgewichtsverteilungen der Markov-Kette mit Übergangswahrscheinlichkeiten $P(0, 1) = a$ und $P(1, 0) = a/2$. *[9]*

d) Sei B_n die Anzahl der Besuche der Markov-Kette aus c) im Zustand 1. Was können Sie über das asymptotische Verhalten von B_n für $n \to \infty$ aussagen? Formulieren Sie präzise! Aussagen aus der Vorlesung können ohne Beweis vorausgesetzt werden. *[9]*

3. (Iterationsverfahren)
Seien $b \in \mathbb{R}^d$ und $A = (a_{ij})_{i,j=1}^d \in \mathbb{R}^{d \times d}$ mit $a_{ii} \neq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$.

a) Wie sind die folgenden Objekte definiert? [*6 P.*]

   (i) ℓ^p/ℓ^p Operatornorm $\|A\|_{p,p}$ für $p \in [1, \infty]$,

   (ii) Spektralradius $\varrho(A)$,

   (iii) ℓ^p-Kondition $\kappa_p(A)$.

b) Zeigen Sie: [*12*]

   (i) $\|A\|_{\infty,\infty} = \max_{i=1,\dots,d} \sum_{j=1}^d |a_{ij}|$,

   (ii) $\|A\|_{2,2} = \sqrt{\varrho(A^T A)}$.

c) Geben Sie den Algorithmus des Gauß-Seidel-Verfahrens zur näherungsweisen Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ an. Stellen Sie den Iterationsschritt dieses Verfahrens in der Fixpunktform

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + f$$

mit einer Matrix $T \in \mathbb{R}^{d \times d}$ und $f \in \mathbb{R}^d$ dar. [*9*]

d) Beweisen Sie, dass das Gauß-Seidel-Verfahren bezüglich der Maximumsnorm monoton konvergiert, falls A strikt diagonaldominant ist. [*13*]

4. (Interpolation und Quadratur)

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ und die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

a) Geben Sie das Lagrange-Interpolationspolynom p *explizit* an, und zwar *[9 P.]*

(i) in der Lagrange-Darstellung,

(ii) in der Newton-Darstellung.

b) Zur numerischen Berechnung des Integrals

$$I[f] \;=\; \int_0^2 f(x)\,dx$$

betrachten wir eine Quadraturformel

$$Q[f] \;=\; \sum_{i=0}^{2} w_i f(x_i)$$

mit Gewichten $w_i \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass Q genau dann Exaktheitsgrad ≥ 2 hat, wenn

$$w_i \;=\; \int_0^2 L_i(x)\,dx$$

für $i = 0, 1, 2$ gilt, wobei L_i das i-te Lagrange-Grundpolynom ist. *[8]*

c) Zeigen Sie: Für die Stützstellen x_0, x_1, x_2 von oben ergibt sich $w_0 = \frac{1}{3}$, $w_1 = \frac{4}{3}$ und $w_2 = \frac{1}{3}$. *[6]*

d) Welchen maximalen Exaktheitsgrad hat Q in diesem Fall? *[9]*

e) Geben Sie ein zusammengesetztes Quadraturverfahren an, dass auf dieser Quadraturformel basiert. Was bedeutet es, dass dieses Verfahren die Konsistenzordnung s hat? Welche maximale Konsistenzordnung hat das von Ihnen angegebene Verfahren? *(ohne Beweis)* *[8]*