Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2023
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

9. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Abgabe der Lösungen bis Dienstag 13.6.

---

1. (Heron–Verfahren) Zur Berechnung der Quadratwurzel von positiven Zahlen benutzten wohl schon die Babylonier, spätestens aber der Alexandriner *Heron* (etwa 1. Jh. n. Chr.), das folgende Verfahren: Für beliebige reelle Startwerte $x^{(0)} > 0$ und reelles $a > 0$ setze

$$x^{(n+1)} \;=\; \frac{1}{2}\left(x^{(n)} + \frac{a}{x^{(n)}}\right).$$

a) Zeigen Sie, dass die Folge $x^{(n)}$ für $x^{(0)} > \sqrt{a}$ monoton fallend und durch $\sqrt{a}$ nach unten beschränkt ist. Folgern Sie, dass die Folge in diesem Fall gegen $\sqrt{a}$ konvergiert. Was passiert für Startwerte $x^{(0)} \in (0, \sqrt{a})$?

b) Zeigen Sie weiter, dass das *Heron Verfahren* sogar quadratisch konvergiert, d.h. es existiert eine Konstante $C \in (0, \infty)$ mit

$$\left|x^{(n+1)} - \sqrt{a}\right| \;\leq\; C \cdot \left|x^{(n)} - \sqrt{a}\right|^2 .$$

c) Führen Sie vier Iterationsschritte zur Berechnung von $\sqrt{2}$ aus. Wählen Sie dazu $x^{(0)} = 2$, und stellen Sie erst $x^{(4)}$ als Dezimalzahl dar. Schätzen Sie den Fehler ab.

2. (Numerische Quadratur) Zur näherungsweisen Berechnung des Integrals

$$I[f] \;=\; \int_a^b f(x)\,dx$$

einer Funktion f auf einem „kleinen" Intervall $[a, b]$ kann man u.a. die *Trapezregel*

$$T_{[a,b]}[f] \;=\; \frac{b-a}{2} \cdot \big(f(a) + f(b)\big)$$

oder die *Simpsonregel*

$$S_{[a,b]}[f] \;=\; \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4\,f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\right)$$

verwenden. Integrale über größere Intervalle berechnet man dann näherungsweise, indem man das Intervall zunächst in n Teilintervalle zerlegt und auf jedem der Teilintervalle die

Trapez- bzw. Simpsonregel anwendet. Dies führt zur Approximation von $I[f]$ durch die *Trapezsumme*

$$T_n[f] \;=\; \frac{h}{2}\Big(f(a) + 2\,f(x_1) + \ldots + 2\,f(x_{n-1}) + f(b)\Big)$$

mit $x_i = a + i\,h$ für $i = 0, \ldots, n$ und $h = \frac{b-a}{n}$ bzw. die *Simpsonsumme*

$$S_n[f] \;=\; \frac{h}{3}\Big(f(a) + 4\,f(x_1) + 2\,f(x_2) + 4\,f(x_3) + \ldots + 2\,f(x_{2n-2}) + 4\,f(x_{2n-1}) + f(b)\Big)$$

mit $x_i = a + i\,h$ für $i = 0, \ldots, 2\,n$ und $h = \frac{b-a}{2\,n}$. Zeigen Sie:

a) Die Trapezregel liefert für jedes Polynom 1. Grades den korrekten Wert des Integrals, die Simpsonregel sogar für jedes Polynom vom Grad ≤ 3.

b) Für die Trapez- bzw. Simpsonsumme gilt $T_n[f] = I[f]$ für jede Funktion f, die auf jedem der n Teilintervalle $[a + i/n, a + (i+1)/n]$ linear ist, und $S_n[f] = I[f]$ für jede Funktion f, die auf jedem der n Teilintervalle ein Polynom vom Grad ≤ 3 ist.

c) Sei f zweimal stetig differenzierbar und $C \in (0, \infty)$ mit $|f''(x)| \leq C$ für alle $x \in [a, b]$. Leiten Sie eine Abschätzung für den Approximationsfehler $\big|T_n[f] - I[f]\big|$ her.

3. (Der Fluch der Dimension) Für eine stetige Funktion $h : [0,1]^d \to \mathbb{R}$ möchte man das Integral

$$I[h] \;=\; \int_{[0,1]^d} h(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^1 \cdots \int_0^1 h(x_1, \ldots, x_d)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_d$$

berechnen.

a) Nähern Sie die eindimensionalen Integrale mithilfe der Trapezsumme aus *Aufgabe 3* und geben Sie die resultierende Approximation des d-dimensionalen Integrals an. In wie vielen Punkten muss die Funktion h ausgewertet werden, um die Approximation zu berechnen?

b) Für unabhängige und auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariablen $U_1, \ldots, U_d$ gilt

$$\mathbb{E}\,[h(U_1, \ldots, U_d)] \;=\; I[h].$$

Erklären Sie dies anschaulich (vollständiger Beweis im nächsten Semester), und geben Sie einen Monte Carlo Schätzer für das d-dimensionale Integral $I[h]$ an.

c) Sei $V[h] = I\left[(h - I[h])^2\right]$, und seien $\varepsilon, \delta > 0$. An wie vielen Punkten muss die Funktion h ausgewertet werden, um zu garantieren, dass der Monte Carlo Schätzwert höchstens mit Wahrscheinlichkeit δ um mehr als ε von $I[h]$ abweicht?

d) Wir nehmen nun an, dass h Lipschitz-stetig ist mit Konstante $L = 1$, also

$$|h(x) - h(y)| \leq |x - y|\,.$$

An wie vielen Punkten muss h ausgewertet werden, um mit den Methoden aus a) und b) eine ε-Approximation von $I[h]$ zu erhalten? Vergleichen Sie die Methoden in hohen Dimensionen.