Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2023
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

8. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Abgabe der Lösungen bis Dienstag 6.6.

---

1. (Endliche Markovketten) Wir betrachten zeithomogene Markovketten $(X_n)_{n\geq 0}$ und $(Y_n)_{n\geq 0}$ auf $\{1,2,3\}$ mit Startwert $x_0 \in \{1,2,3\}$ und Übergangsmatrizen

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

a) Untersuchen Sie die Asymptotik der Verteilungen der Markovketten für $n \to \infty$.

b) Wie groß ist die asymptotische relative Häufigkeit der Besuche der Markovkette im Zustand 1?

2. (Stochastische Simulation 1: Das direkte Verfahren. Aufgabe zählt doppelt) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Abbildung $U : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *reellwertige Zufallsvariable*, falls die Menge $\{U \leq c\} = \{\omega \in \Omega : U(\omega) \leq c\}$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ in der σ-Algebra $\mathcal{A}$ enthalten ist. Die Zufallsvariable heißt *gleichverteilt auf dem Intervall* $(0,1)$, falls

$$\mathbb{P}[U \leq c] \;=\; c \qquad \text{für alle } c \in (0,1).$$

a) Sei $p : \mathbb{N} \to [0,1]$ die Massenfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den natürlichen Zahlen, und $F : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to [0,1]$ die durch

$$F(n) \;=\; \sum_{i=1}^{n} p(i)$$

definierte *kumulative Verteilungsfunktion*.

Zeigen Sie: Ist $U : \Omega \to (0,1)$ gleichverteilt, dann wird durch

$$X = n \;:\Leftrightarrow\; F(n-1) < U \leq F(n), \qquad n \in \mathbb{N},$$

eine Zufallsvariable mit Massenfunktion p definiert.

b) Geben Sie einen Algorithmus an, der aus einer gleichverteilten Zufallszahl $u \in (0,1)$ eine Stichprobe von der Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Massenfunktion p erzeugt.

c) Bestimmen Sie die mittlere Laufzeit des Algorithmus. Wie aufwändig ist es, mit dem Algorithmus eine Stichprobe von der Poisson(λ)-Verteilung zu erzeugen?

d) Sei nun $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ eine stetige Funktion mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,ds = 1$. Eine reellwertige Zufallsvariable X heißt *absolutstetig mit Verteilungsdichte* f, falls

$$\mathbb{P}[a < X \leq b] \;=\; \int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s \qquad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } a \leq b.$$

Sei $F : \mathbb{R} \to (0, 1)$ die durch

$$F(t) \;=\; \int_{-\infty}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

definierte *Verteilungsfunktion*.

Zeigen Sie: Für U wie in a) ist

$$X \;:=\; F^{-1}(U)$$

eine Zufallsvariable mit Verteilungsdichte f.

e) Wie können Sie aus einer gleichverteilten Zufallszahl $u \in (0, 1)$ eine Stichprobe x von einer Zufallsvariable $X : \Omega \to (0, \infty)$ mit Verteilung $\mathrm{Exp}(\lambda)$ erzeugen, d.h.

$$\mathbb{P}[a < X \leq b] \;=\; \int_a^b \lambda \exp(-\lambda s)\,\mathrm{d}s \qquad \text{für alle } 0 \leq a \leq b\ ?$$

3. (Stochastische Simulation II: Der Metropolis-Hastings-Algorithmus) Sei μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf einem endlichen Zustandsraum S mit Gewichten $\mu(x) > 0$, und sei $Q = (Q(x, y))_{x,y \in S}$ eine irreduzible und aperiodische stochastische Matrix. Für $x, y \in S$ setzen wir

$$a(x, y) := \min\left(\frac{\mu(y)Q(y, x)}{\mu(x)Q(x, y)}, 1\right) \quad \text{falls } Q(x, y) \neq 0, \quad \text{und} \quad a(x, y) := 1 \quad \text{sonst.}$$

Der *Metropolis-Hastings-Algorithmus* erzeugt näherungsweise Stichproben von μ durch Simulation einer Markovkette $(X_n)_{n \geq 0}$ mit Gleichgewicht μ. Dabei wird eine Stichprobe x_{n+1} von X_{n+1} folgendermaßen aus einer Stichprobe x_n von X_n erzeugt:

- Ziehe eine Stichprobe y von der *Vorschlagsverteilung* $Q(x_n, \cdot)$.
- Setze $x_{n+1} := y$ mit Wahrscheinlichkeit $a(x_n, y)$, und $x_{n+1} := x_n$ sonst.

a) Zeigen Sie, dass der Algorithmus eine zeithomogene Markovkette $(X_n)_{n \geq 0}$ simuliert, und bestimmen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten $P(x, y)$ für $x, y \in S$.

b) Zeigen Sie, dass μ ein Gleichgewicht ist.

Es gelte nun $Q(x, y) > 0$ genau dann, wenn $Q(y, x) > 0$, für alle $x, y \in S$.

c) Folgern Sie, dass die Verteilung von X_n für einen beliebigen Startwert X_0 gegen μ konvergiert.

d) Sei nun $X_0 \sim \mu$ und $f : S \to \mathbb{R}$. Was können Sie über das asymptotische Verhalten der ergodischen Mittelwerte $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(X_i)$ für $n \to \infty$ aussagen?