Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2023
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

7. Übungsblatt ,,Algorithmische Mathematik 2"

Abgabe der Lösungen bis Dienstag 23.5.

---

1. (Binomialmodell für Aktienkurse) In einem einfachen Finanzmarktmodell wird angenommen, dass der Kurs S_n einer Aktie an einem Tag mit Wahrscheinlichkeit p um den Faktor $u > 1$ auf den Wert $u \cdot S_n$ steigt, und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ um den Faktor $d < 1$ auf den Wert $d \cdot S_n$ fällt.

a) Präzisieren Sie die Modellannahmen.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Kurses S_n nach n Tagen, wenn der Kurs bei $S_0 = 1$ startet.

c) Sei nun $p = 1/2$, $d = 1/2$ und $u = 7/4$. Was können Sie über das asymptotische Verhalten von S_n für $n \to \infty$ aussagen?

d) Simulieren Sie 100 Verläufe mit diesen Parametern (dazu brauchen Sie den Python-Code zu ,,Gesetz der großen Zahlen und Random Walks" auf der Vorlesungshomepage nur geringfügig zu modifizieren). Ist Ihre Beobachtung konsistent mit Ihrem Ergebnis aus Aufgabenteil c)?

2. (Exponentielle Abschätzungen)

a) Sei X eine diskrete reellwertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie, dass für alle $c, t \geq 0$ gilt:

$$\mathbb{P}[X \geq c] \;\leq\; e^{-ct}\, \mathbb{E}\left[e^{tX}\right].$$

b) Es seien nun $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[X_i = 1] = p$ und $\mathbb{P}[X_i = 0] = 1 - p$, $0 < p < 1$. Zeigen Sie, dass für $a, t \geq 0$ gilt:

$$\mathbb{P}\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq a\Big] \;\leq\; \mathrm{e}^{-nat}\, \mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{tX_1}\big]^n.$$

Beweisen Sie mithilfe dieser Abschätzung die Bernstein-Ungleichung

$$\mathbb{P}\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq p + \varepsilon\Big] \;\leq\; \mathrm{e}^{-2n\varepsilon^2} \qquad \text{für alle } \varepsilon \geq 0.$$

3. (Gemeinsame Verteilungen beim Würfeln) Seien X und Y die Augenzahlen beim Werfen zweier Würfel, und seien $N = \min(X, Y)$, $M = \max(X, Y)$ und $S = X + Y$.

a) Bestimmen Sie die Verteilungen von N und S.

b) Bestimmen Sie die gemeinsamen Verteilungen von

$$\text{(i) } X \text{ und } N, \quad \text{(ii) } N \text{ und } M, \quad \text{(iii) } M \text{ und } S,$$

und stellen Sie diese tabellarisch dar.

c) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen N, M und S.

d) Führen Sie das Zufallsexperiment 10.000-mal durch, und bestimmen Sie die gemeinsame empirische Verteilung von X und Y.

4. (Varianz und Kovarianz) Seien X und Y Zufallsvariablen mit Wertebereich $\{0, 1, 2, 3\}$. Die gemeinsame Verteilung sei gegeben durch

	y = 0	y = 1	y = 2	y = 3
x = 0	0.11	0.05	0.02	0.00
x = 1	0.04	0.20	0.10	0.04
x = 2	0.01	0.05	0.18	0.06
x = 3	0.00	0.01	0.03	0.10

a) Berechnen Sie die Erwartungswerte von X und Y.

b) Berechnen Sie $\mathrm{Var}[X], \mathrm{Var}[Y]$ und $\mathrm{Cov}[X, Y]$.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsvariable

$$Z := (X + Y)/2 .$$

P. (Konvergenz ins Gleichgewicht; Abgabe bis 6.6.)
Bearbeiten Sie die vierte Programmieraufgabe auf der Homepage.