Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2023
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

6. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Abgabe der Lösungen bis Dienstag 16.5.

---

1. (Münzwürfe) Eine Münze zeigt „Zahl" mit Wahrscheinlichkeit p. Sei q_n die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl von „Zahl" nach n Würfen gerade ist. Zeigen Sie, dass

$$q_{n+1} \;=\; (1-p)q_n \,+\, p(1-q_n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt, und berechnen Sie q_n.

2. (Hardy-Weinberg-Gesetz der Populationsgenetik) Ein Pflanzen-Gen besitze die beiden Allele A und a. Ein klassisches Verfahren zur Züchtung von Pflanzen vom Genotyp AA bzw. aa ist die Selbstbefruchtung.

a) Begründen Sie anhand eines geeigneten Modells, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(x,y) \;:=\; \mathbb{P}\big[\,\text{Genotyp } y \text{ in Generation } n+1 \,|\, \text{Genotyp } x \text{ in Generation } n\,\big]$$

durch $P(aa,aa) = P(AA,AA) = 1$, $P(Aa,AA) = P(Aa,aa) = 1/4$ und $P(Aa,Aa) = 1/2$ gegeben sind.

b) Bestimmen Sie alle Gleichgewichte der Dynamik.

c) Berechnen Sie die n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten $P^n(Aa,Aa)$.

d) Der Genotyp zu Beginn sei durch zufälliges Entnehmen einer einzelnen Stichprobe aus einer Population gegeben, in der der Anteil des Allels A unter allen Allelen 20% beträgt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich nach hinreichend vielen Generationen der Genotyp AA einstellt ?

3. (Geburtenverteilung) Angenommen, die Gesamtzahl G der Geburten pro Woche in einem Krankenhaus ist Poisson-verteilt mit Parameter λ. Weiterhin sei jede Geburt, unabhängig von anderen Geburten und von der Gesamtzahl der Geburten, mit Wahrscheinlichkeit p ein Junge, und mit Wahrscheinlichkeit $q = 1-p$ ein Mädchen. Wir beschreiben die Anzahl der pro Woche geborenen Jungen bzw. Mädchen durch Zufallsvariablen J und M. Zeigen Sie

$$\mathbb{P}[J=j, M=m] \;=\; \frac{(\lambda p)^j e^{-\lambda p}}{j!} \cdot \frac{(\lambda q)^m e^{-\lambda q}}{m!}\;,$$

und folgern Sie, dass J und M unabhängig und Poisson-verteilt mit Parametern λp bzw. λq sind.

4. (Unabhängigkeit und Zahlentheorie) Sei $s > 1$. Die *Riemannsche Zeta–Funktion* ist definiert durch

$$\zeta(s) \ := \ \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Sei X auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$ und Verteilung

$$\mathbb{P}[X = n] \ = \ \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}.$$

Sei E_m das Ereignis "X ist teilbar durch m". Zeigen Sie:

a) Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{P}[E_m] = m^{-s}$.

b) Die Ereignisse E_p, wobei p eine Primzahl ist, sind unabhängig.

c) Berechnen Sie $\mathbb{P}\big[\bigcap_{p \text{ Primzahl}} E_p^c\big]$, und folgern Sie die *Eulersche Formel*

$$\frac{1}{\zeta(s)} \ = \ \prod_{p \text{ Primzahl}} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big).$$

*) *Freiwillige Zusatzaufgabe:* Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass X durch keine Quadratzahl außer 1 teilbar ist, gleich $1/\zeta(2s)$ ist. Sei nun Y unabhängig von X mit derselben Verteilung, und sei H der größte gemeinsame Teiler von X und Y. Sei B_p das Ereignis, dass X und Y beide durch p teilbar sind. Was hat das Ereignis $\bigcap B_p^c$ mit H zu tun? Zeigen Sie:

$$\mathbb{P}[H = n] \ = \ \frac{n^{-2s}}{\zeta(2s)}.$$

5. (Tom Bayes in Bandrika) Tom Bayes befindet sich auf seiner Bandrika-Reise genau in der Situation, wie Sie in *Aufgabe 1 vom 4. Übungsblatt.* Im Gegensatz zu Ihnen geht er jedoch davon aus, dass die Antwort Osten mit Wahrscheinlichkeit ε korrekt ist. Zeigen Sie:

a) Egal welche Antwort Tom auf seine erste Frage bekommt, glaubt er weiterhin, dass die Antwort Osten mit Wahrscheinlichkeit ε richtig ist.

b) Sind die ersten beiden Antworten identisch (OO oder WW), so glaubt Tom immer noch, dass die Antwort Osten mit Wahrscheinlichkeit ε richtig ist.

c) Nach drei gleichen Antworten beurteilt Tom die Situation folgendermaßen:

$$P\big[\,\text{Osten ist korrekt} \,|\, \text{OOO}\,\big] \ = \ \frac{9\varepsilon}{11 - 2\varepsilon}, \quad P\big[\,\text{Osten ist korrekt} \,|\, \text{WWW}\,\big] \ = \ \frac{11\varepsilon}{9 + 2\varepsilon}\,.$$