Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2023
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

5. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Abgabe der Lösungen bis Dienstag 9.5. über eCampus.

---

1. (Modellieren mit bedingten Wahrscheinlichkeiten)

a) Auf einer Ausstellung sind von zwölf Gemälden zehn Originale und zwei Fälschungen. Ein Besucher wählt zufällig ein Bild aus, befragt aber, bevor er es kauft, eine Expertin nach deren Meinung. Diese gibt in neun von zehn Fällen eine richtige Beurteilung ab, unbeeinflusst davon, ob das vorgelegte Bild ein Original oder eine Fälschung ist. Die Expertin urteilt, dass das Bild eine Fälschung sei. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es ein Original?

b) Der Besucher gibt das Bild zurück und wählt ein anderes. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dieses ein Original?

c) Eine Fabrik stellt Lampen her, von denen jedes Fabrikat genau einen Lichtschalter besitzt. Dieser Schalter wird von zwei Firmen, A und B, bezogen, wobei 60% aller Schalter von A und 40% aller Schalter von B stammen. Erfahrungsgemäß sind 5% aller A-Schalter und 2% aller B-Schalter defekt. Die Endkontrolle der Fabrik akzeptiert jeden intakten Schalter und fälschlicherweise auch 5% aller defekten Schalter. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gerät in den Verkauf gelangt und einen defekten Schalter besitzt.

2. (Runs beim Münzwurf II) Seien $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ unabhängige Münzwürfe mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ für "Zahl" und Wahrscheinlichkeit $q := 1 - p$ für "Wappen".

a) Geben Sie explizit einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, auf dem die Zufallsvariablen realisiert werden können.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mit Z_i ein neuer Run beginnt, vgl. Aufgabe 4 vom 2. Übungsblatt.

c) Folgern Sie: Für die Anzahl Y aller Runs gilt

$$\mathbb{E}[Y] = 1 + 2pq(n - 1).$$

3. (Polyas Urnenmodell) Eine Urne enthält zur Zeit $n = 0$ je eine rote und eine schwarze Kugel. Vor jedem Zeitpunkt $n = 1, 2, 3, \ldots$ wird eine zufällig ausgewählte Kugel entnommen und zusammen mit einer neuen Kugel derselben Farbe in die Urne zurückgelegt. Sei $R_n(\omega)$ die Anzahl der roten Kugeln zur Zeit n. Berechnen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen R_n

a) für die Fälle $n = 1, 2$ und 3,

b) für den allgemeinen Fall.

4. (Random Walk) Sei $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf $\Omega = \{-1, +1\}^N$ und $X_i(\omega) = \omega_i$. Wir interpretieren

$$S_0 \;:=\; 0 \quad \text{und} \quad S_n \;:=\; X_1 + \ldots + X_n, \qquad n = 1, \ldots, N,$$

als zufällige Irrfahrt eines Teilchens auf $\mathbb{Z}$ mit Start in 0. Für $\lambda \in \mathbb{N}$ sei

$$T_\lambda \;=\; \min\{n > 0 \mid S_n = \lambda\}$$

der Zeitpunkt des ersten Besuchs in λ. Zeigen Sie, dass

a) die Verteilung von S_n gegeben ist durch

$$\mathbb{P}[S_n = k] \;=\; \begin{cases} 0 & \text{, falls } n + k \text{ ungerade oder } |k| > n, \\ 2^{-n}\binom{n}{(n+k)/2} & \text{, sonst.} \end{cases}$$

b) das Reflexionsprinzip gilt, d.h. für jedes $c > 0$ erhält man

$$\mathbb{P}[S_n = \lambda - c,\, T_\lambda \le n] \;=\; \mathbb{P}[S_n = \lambda + c].$$

c) die Verteilung von T_λ gegeben ist durch

$$\mathbb{P}[T_\lambda \le n] \;=\; \mathbb{P}[S_n \ge \lambda] + \mathbb{P}[S_n > \lambda].$$

P. (Zufällige Teilmengen und Monte Carlo Simulation; Abgabe bis 16.5.) Bearbeiten Sie die dritte Programmieraufgabe auf der Homepage.