Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2023
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

4. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Abgabe der Lösungen bis Dienstag 2.5. über eCampus.

---

1. (Bandrika 1) Sie haben sich im Nationalpark von Bandrika verlaufen. Von den Besuchern im Park sind zwei Drittel Touristen. Fragen nach der Richtung werden von diesen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ richtig beantwortet. Dabei sind Antworten auf wiederholte Fragen unabhängig, auch wenn die Frage und die Person dieselben sind. Wenn man hingegen einen Bandrikaner oder eine Bandrikanerin fragt, ist die Antwort immer falsch.

a) Sie fragen eine Person, ob sich der Ausgang in Richtung Osten oder Westen befindet. Als Antwort erhalten Sie Osten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dies richtig ist?

b) Sie fragen dieselbe Person nochmals und bekommen dieselbe Antwort. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, nun die richtige Antwort erhalten zu haben, $\frac{1}{2}$ beträgt.

c) Sie richten dieselbe Frage ein drittes Mal an dieselbe Person und erhalten wieder die Antwort Osten. Wie hoch ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass die Antwort stimmt?

d) Ein viertes Mal wird die geduldige Person von Ihnen gefragt, doch die Antwort ist wieder Osten. Zeigen Sie, dass die Antwort mit Wahrscheinlichkeit $\frac{27}{70}$ richtig ist.

e) Zeigen Sie für den Fall, dass die vierte Antwort Westen wäre, dass die Richtung Osten mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$ zutrifft.

2. (Münzwürfe)

a) Zeigen Sie, dass die Varianz einer diskreten reellwertigen Zufallsvariable X mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ durch

$$\mathrm{Var}[X] \;=\; \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \qquad \text{gegeben ist.}$$

b) Zehn Personen sitzen in einem Kreis, und jeder wirft eine faire Münze. Sei N die Anzahl der Personen, deren Münze die gleiche Seite wie die Münzen beider Nachbarn zeigt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[N = 9]$ und $\mathbb{P}[N = 10]$, sowie den Erwartungswert $\mathbb{E}[N]$.

c) Berechnen Sie die Varianz $\mathrm{Var}[N]$.

3. (Zufallspermutationen) Sei $\mathcal{S}_n$ die Menge aller Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$.

a) Eine aufsteigende Teilfolge einer Permutation $\omega \in \mathcal{S}_n$ ist durch eine Sequenz

$$\omega(i_1) < \omega(i_2) < \ldots < \omega(i_k)$$

mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ gegeben. Sei $N(\omega)$ die Anzahl der aufsteigenden Teilfolgen der Permutation ω. Zeigen Sie, dass für eine (gleichverteilte) Zufallspermutation aus $\mathcal{S}_n$ gilt:

$$\mathbb{E}[N] \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\binom{n}{k}.$$

b) Geben Sie einen Algorithmus an, der eine Zufallspermutation aus $\mathcal{S}_n$ erzeugt.

4. (Glücksspiele, Überbuchungen)

a) Beim Spiel *chuck-a-luck* leistet ein Spieler einen Euro Einsatz, nennt eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 6$ und wirft dann drei faire Würfel. Zeigt mindestens einer der Würfel seine Zahl, so erhält er den Einsatz zurück und außerdem für jeden Würfel, der seine Zahl zeigt noch einen zusätzlichen Euro. Erscheint die genannte Zahl nicht, so verfällt der Einsatz. Es heißt, der Bankvorteil bei diesem Spiel betrüge 7,9%. Was meinen Sie hierzu?

b) 4% aller Fluggäste, die Plätze reservieren, erscheinen nicht. Die Fluggesellschaft weiß dies und verkauft 75 Flugkarten für 73 verfügbare Plätze. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Fluggäste einen Platz bekommen? Lösen Sie die Aufgabe exakt und mit Poisson-Näherung.