**Institut für Angewandte Mathematik**
**Sommersemester 2023**
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

# 3. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

**Abgabe der Lösungen bis spätestens dienstags elektronisch über eCampus.**
**Bitte laden Sie ein PDF Dokument pro Gruppe hoch.**

---

**1. (Zufallsstichproben mit und ohne Zurücklegen)**

a) Eine Prüfung besteht aus 12 Fragen, die mit *ja* oder *nein* zu beantworten sind. Sie gilt bei mindestens 8 richtigen Antworten als bestanden.

   i) Eine Person kreuzt auf gut Glück die Antworten an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht sie die Prüfung?

   ii) Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit, wenn sie 2 Fragen mit Sicherheit richtig beantworten kann und nur den Rest zufällig ankreuzt?

   iii) Falls sie gar nichts weiß, wäre es dann für sie günstiger, zufällig 6-mal *ja* und 6-mal *nein* anzukreuzen, vorausgesetzt, dass für 6 Fragen die richtige Antwort *ja* lautet?

b) Geben Sie die Massenfunktionen der Binomialverteilung mit Parametern $n$ und $p$ und der hypergeometrischen Verteilung mit Parametern $n$, $m$ und $r$ an (Bezeichnungen wie in der Vorlesung). Zeigen Sie: Für $m \to \infty$ und $r \to \infty$ mit $p = \frac{r}{m}$ konstant konvergiert die hypergeometrische Verteilung gegen die Binomialverteilung mit Parametern $n$ und $p$. Interpretieren Sie diese Aussage.

**2. (Geburten)** Im 18. Jahrhundert wurden in London in 82 aufeinander folgenden Jahren mehr Jungen als Mädchen geboren. Da Jungen und Mädchen mit ungefähr (aber nicht genau) gleicher Wahrscheinlichkeit geboren werden, scheint das ein sehr unwahrscheinliches Ereignis zu sein, das der göttlichen Vorsehung zugeschrieben wurde. Ist das wirklich so? Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass jede Geburt unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.485$ ein Mädchen ergibt (und vernachlässigen Sie die Möglichkeit von Zwillingen usw.).

a) Zeigen Sie: die Wahrscheinlichkeit, dass in $2n$ Geburten mehr Mädchen als Jungen geboren werden ist nicht größer als

$$\binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \frac{1-p}{1-2p} \ .$$

b) Angenommen, in 82 aufeinander folgenden Jahren werden jedes Jahr 20.000 Kinder geboren. Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass in jedem Jahr mehr Jungen als Mädchen geboren werden ist mindestens 0.99.

*Hinweis: Sie können die Stirlingsche Formel benutzen:*

$$1 \leq \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n} \leq e^{1/(12n)} .$$

**3. (Erwartungswerte beim Würfeln)** Geben Sie geeignete Wahrscheinlichkeitsräume und Zufallsvariablen an, und berechnen sie die Verteilungen und Erwartungswerte für

a) die Augenzahl beim Werfen eines fairen Würfels,

b) die maximale Augenzahl beim Werfen von zwei fairen Würfeln,

c) das Produkt der Augenzahlen beim Werfen von zwei fairen Würfeln.

**4. (Erwartungswert von positiven Zufallsvariablen mit ganzzahligen Werten)**

a) Sei $T$ eine Zufallsvariable mit Werten in $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[T \geq k].$$

b) Berechnen Sie, wieviele Würfe im Schnitt nötig sind, bis beim Würfeln mit einem fairen Würfel zum ersten Mal eine 6 fällt.

**P. (Würfeln II)** Bearbeiten Sie die zweite Programmieraufgabe auf der Homepage.