Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2023
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

2. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Abgabe der Lösungen bis spätestens dienstags elektronisch über eCampus.
Bitte laden Sie ein PDF Dokument pro Gruppe hoch.

Hinweis: Geben Sie bei Modellierungsaufgaben stets das verwendete stochastische Modell an, also den Wahrscheinlichkeitsraum und die Zufallsvariablen, die Sie betrachten.

1. (Münzwürfe) Eine faire Münze wird n mal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlickeit, dass beim n-ten Wurf

a) Kopf zum ersten mal eintritt,

b) die Anzahl von Kopf und Zahl gleich ist,

c) genau zweimal Kopf eingetreten ist,

d) mindestens zweimal Kopf eingetreten ist.

2. (σ-Algebren)

a) Geben Sie alle auf der Menge $\Omega = \{1, 2, 3\}$ möglichen σ-Algebren an.

b) Finden Sie jeweils die kleinste σ-Algebra auf Ω, welche $\mathcal{M}$ enthält:

i) $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}, \ \mathcal{M} = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}\}$.
ii) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \ \mathcal{M} = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$.
iii) $\Omega = \{0, 1\}^4, \ \mathcal{M} = \{\{X_1 = 1\}, \{X_2 = 1\}\}$, wobei $X_i(\omega) := \omega_i$.
iv) $\Omega = [0, 1], \ \mathcal{M} = \{\{x\} : x \in [0, 1]\}$.

3. (Bonferroni's Ungleichung) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\Big[\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big] \ \geq \ \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}[A_i] - \sum_{1 \leq i < j \leq k} \mathbb{P}[A_i \cap A_j].$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Fälle $k = 2$ und $k = 3$.

b) In jeder Packung Corn Flakes befindet sich je eines von insgesamt n verschiedenen Bildern von Fußballspielerinnen, darunter auch 11 Bilder von Spielerinnen aus der Nationalmannschaft. Wer nun die Bilder aller 11 Nationalspielerinnen gesammelt hat, gewinnt eine Reise zur Weltmeisterschaft. Um die Reise auf jeden Fall zu gewinnen, kauft Fred Feuerstein $3n$ Packungen.

Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, tatsächlich die gewünschten Bilder zu erhalten, zwischen $1 - 11 \cdot (1 - \frac{1}{n})^{3n}$ und $1 - 11 \cdot (1 - \frac{1}{n})^{3n} + 55 \cdot (1 - \frac{2}{n})^{3n}$ liegt. Welchen Wert haben diese Schranken ungefähr für große n?

4. (Wartezeiten und Runs)

a) Bestimmen Sie die Verteilung der Wartezeit T auf die erste 6 unter n Würfen mit einem fairen Würfel, wobei wir $T = \infty$ setzen wenn keine 6 gewürfelt wird.

b) In manchen Anwendungen möchte man testen, ob eine Bitfolge

$$\omega \;=\; (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$$

,,rein zufällig" zustande kam oder nicht. Eine Kenngröße, mit der man quantifizieren kann, ob die Nullen und Einsen sehr gleichmäßig verteilt sind oder eher in wenigen Gruppen (runs) vorkommen, ist die Zahl

$$V(\omega) \;:=\; |\{i \in \{2, \ldots, n\} \mid x_i \neq x_{i-1}\}|.$$

Beispielsweise ist $V\big((1,1,1,1,0,0,0,0)\big) = 1$ und $V\big((1,0,1,0,1,0,1,0)\big) = 7$.

Sei $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf $\{0,1\}^n$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}[V = k] \;=\; 2^{-(n-1)} \binom{n-1}{k}.$$

c) Bestimmen Sie $V(\omega)$ für die fünf Folgen unter ,,Zufall oder kein Zufall?" auf der Homepage der Vorlesung und für eine von Ihnen selbst erstellte ,,möglichst zufällige" Folge. Wie können Sie beurteilen, ob die Folgen hinsichtlich der Runs echten Zufallsfolgen ähnlich sind?