Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2023
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

12. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Abgabe der Lösungen bis Dienstag 4.7.

---

1. (Lagrange-Interpolation) Zeigen Sie für beliebige Stützstellen $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$:

a) Die Lagrange-Polynome $L_0, L_1, \ldots L_n$ zu den gegebenen Stützstellen bilden eine Basis des reellen Vektorraums aller Polynome vom Grad kleiner gleich n.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$$

2. (Berechnung von Interpolationspolynomen)

a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p zweiten Grades, welches $p(0) = 0$, $p(1) = -3$ und $p(3) = 1$ erfüllt. Verwenden Sie dafür sowohl die Lagrange- als auch die Newton-Interpolationsformel. Überprüfen Sie, dass das Polynom in beiden Fällen übereinstimmt. Werten Sie das Interpolationspolynom mit Hilfe des Horner-Schemas an der Stelle $x = 0.5$ aus.

b) Zeigen Sie, dass die Interpolationspolynome $p_{i,k}$ zu den Werten (x_j, y_j), $j = i, i+1, \ldots, k$ die Aitken-Neville-Rekursionsformeln

$$p_{i,k}(x) = \frac{(x - x_i)p_{i+1,k}(x) - (x - x_k)p_{i,k-1}(x)}{x_k - x_i}$$

für alle $0 \leq i < k \leq n$ und $x \in \mathbb{R}$ erfüllen.

3. (Hermite-Interpolation) Zu einer gegebenen Funktion $f \in C^{2n+2}(\mathbb{R})$ und den reellen Stützstellen $x_0 < \ldots < x_n$ sei ein Polynom p mit Höchstgrad $2n + 1$ gesucht, welches die speziellen Hermiteschen Interpolationsbedingungen

$$p(x_k) \;=\; f(x_k), \qquad p'(x_k) \;=\; f'(x_k), \quad k = 0, \ldots, n$$

erfüllt.

a) Beweisen Sie die Darstellung

$$p(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} U_k(x)\, f(x_k) + \sum_{k=0}^{n} V_k(x)\, f'(x_k)$$

mit

$$\begin{aligned} U_k(x) &= \big(1 - 2\, L_k'(x_k)\,(x - x_k)\big)\, L_k(x)^2 \\ V_k(x) &= (x - x_k)\, L_k(x)^2. \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in [x_0, x_n]$ ein $\xi \in (x_0, x_n)$ existiert, so dass

$$f(x) - p(x) \;=\; \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\, w(x)^2,$$

wobei $w(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$ ist.

P. (Newtonsche Darstellung des Interpolationspolynoms; Abgabe bis 11.7.)
Bearbeiten Sie die sechste Programmieraufgabe auf der Homepage.