Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2023
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

11. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Abgabe der Lösungen bis Dienstag 27.6.

---

1. (Matrixnormen) Die Frobenius-Norm einer Matrix $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le d} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ist gegeben durch

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}^2\right)^{1/2}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_F$ eine mit der euklidischen Norm verträgliche Matrixnorm ist.

b) Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

$$\|A\|_{2,2} \le \sqrt{\|A\|_{1,1}\|A\|_{\infty,\infty}}, \tag{1}$$

$$\|A\|_{2,2} \le \|A\|_F \le \sqrt{d}\|A\|_{2,2}. \tag{2}$$

2. (Konvergenzkriterien für das Jacobi-Verfahren) Zeigen Sie, dass das Jacobi-Verfahrens zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $A\,x = b$ mit $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le d} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und $b \in \mathbb{R}^d$ konvergiert, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a) Das starke Zeilensummenkriterium:

$$\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{d} |a_{kl}| < |a_{kk}|, \qquad \forall\, 1 \le k \le d.$$

b) Das starke Spaltensummenkriterium:

$$\sum_{\substack{k=1\\ k\neq l}}^{d} |a_{kl}| < |a_{ll}|, \qquad \forall\, 1 \le l \le d.$$

c) Das starke Quadratsummenkriterium: $a_{ii} \neq 0\ \forall\, 1 \le i \le d$, und

$$\sum_{k=1}^{d} \sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{d} \left|\frac{a_{kl}}{a_{kk}}\right|^2 < 1.$$

Hinweis: Betrachten Sie geeignete Matrixnormen.

3. (Diskretisierung eines Randwertproblems) Seien p und u hinreichend glatte Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$. Präzisieren Sie die Aussage

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x)\right) \approx \frac{p(x-\frac{h}{2})u(x-h) - \left[p(x-\frac{h}{2}) + p(x+\frac{h}{2})\right]u(x) + p(x+\frac{h}{2})u(x+h)}{h^2},$$

und geben Sie eine Diskretisierung des linearen Randwertproblems

$$-(pu')' + qu = f \quad \text{auf (a,b)}, \qquad u(a) = u(b) = 0,$$

an.

4. (Kondition) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 101 & 99 \\ 99 & 101 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 101 & 99 \\ -99 & 101 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Konditionszahlen κ_∞ und κ_2 von A und B.

b) Für eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Näherung von A^{-1} und $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ eine beliebige submultiplikative Matrixnorm. Zeigen Sie:

$$\frac{\|A^{-1} - C\|}{\|A^{-1}\|} \leq \min\big(\|AC - I\|, \|CA - I\|\big) \tag{3}$$

$$\kappa(A)^{-1}\|CA - I\| \leq \|AC - I\| \leq \kappa(A)\|CA - I\|. \tag{4}$$

c) Berechnen Sie zu Testzwecken $CA - I$ und $AC - I$ für die Matrix A von oben und

$$C = \frac{1}{400}\begin{pmatrix} 102 & -98 \\ -100 & 100 \end{pmatrix}.$$