

1. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2“

Abgabe der Lösungen bis spätestens dienstags in elektronischer Form.
Ausnahme: Abgabe zum ersten Übungsblatt bis Mittwoch 12.4., 10 Uhr.

Bitte geben Sie ein pdf-file ab, dass die komplette Abgabe enthält.

Die maximale Gruppengröße pro Abgabe ist 3.

Für die Programmieraufgaben haben Sie zwei Wochen Bearbeitungszeit.

1. (Gleichverteilung)

- Sei Ω eine endliche Menge. Definiere die Gleichverteilung P auf Ω und zeige durch Überprüfen der Axiome, dass P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.
- In einer Urne befinden sich N Kugeln, von denen K rot sind. Wir ziehen n Kugeln ohne Zurücklegen. Beschreibe dieses Modell durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum. Zeige: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Stichprobe k rote Kugeln enthält, ist

$$\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k} / \binom{N}{n}.$$

2. (Kolmogorovsche Axiome)

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, B \in \mathcal{A}$.

- Es gelte $P[A] = \frac{3}{4}$ und $P[B] = \frac{1}{3}$. Zeige: $\frac{1}{12} \leq P[A \cap B] \leq \frac{1}{3}$ und demonstriere anhand von Beispielen, dass beide Extremfälle eintreten können.
- Zeige, dass $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$ ist.
- Ist $A \cup B = \Omega$, dann gilt $P[A \cap B] = P[A]P[B] - P[A^c]P[B^c]$.

3. (Geburtstagsparadox) In einer Klasse sind n Schüler.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_n , dass mindestens zwei Schüler am selben Tag Geburtstag haben? Berechne p_{22} und p_{23} explizit. Dabei sei vereinfachend angenommen, dass kein Schüler am 29. Februar geboren ist und alle anderen Geburtstage gleich wahrscheinlich sind.

b) Zeige unter Verwendung der Ungleichung $1 - x \leq \exp(-x)$, dass

$$p_n \geq 1 - \exp(-n(n-1)/730).$$

Welche untere Schranke ergibt sich für p_{30} ?

4. (Ereignisse als Mengen)

Sei \mathcal{A} eine σ -Algebra auf Ω , und seien $A, B, A_n \in \mathcal{A}$ Ereignisse. Was bedeuten (mit Begründung) die folgenden Ereignisse anschaulich?

$$\text{a) } A \cap B \quad \text{b) } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{c) } \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

Sei nun speziell $\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \{-1, +1\}\}$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildungen $S_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$S_n(\omega) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \omega = (x_1, x_2, \dots) \in \Omega.$$

Was bedeuten die den folgenden Mengen zugeordneten Ereignisse anschaulich?

$$\text{d) } S_n^{-1}\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) \quad \text{e) } \bigcap_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{Q} \\ \varepsilon > 0}} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} S_m^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$$

5. (Gerüchte)

In einer Stadt mit $n + 1$ Einwohnern erzählt eine Person einer zweiten ein Gerücht, diese ihrerseits erzählt es erneut weiter, usw. Bei jedem Schritt wird der „Empfänger“ zufällig unter den n möglichen Personen mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt (- gelegentlich erzählt also auch jemand das Gerücht derselben Person, von der er es gehört hat). Das Gerücht wird auf diese Weise r mal weiter erzählt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass

- es nicht zum Urheber zurückkommt,
- es keiner Person zweimal erzählt wird.
- Setze im Ergebnis von a) insbesondere $r = n + 1$, und berechne den Limes für $n \rightarrow \infty$.

P1. (Würfel I, Abgabe bis 18.4.) Die mit „P“ gekennzeichneten Übungsaufgaben werden Programmieraufgaben sein. Programmiersprache ist Python, als Programmierumgebung verwenden wir Jupyter Notebooks.

- Installieren Sie Python wie auf der Vorlesungshomepage beschrieben, und laden Sie sich die Einführung in Jupyter Notebooks und das Beispiel Notebook herunter.
- Bearbeiten Sie die erste Programmieraufgabe auf der Homepage.