Institut für numerische Simulation
Sommersemester 2017
André Uschmajew, Behrend Heeren

Beispiel von Bernstein

Lösungsskizzen

Die Polynominterpolation mit äquidistanten Stützstellen besitzt im Allgemeinen keine guten globalen Approximationseigenschaften. Das folgende extreme Beispiel hierfür stammt von Bernstein.[1] Sei p_{2n} das Interpolationspolynom vom Grad $2n$ der Funktion $f(x) = |x|$ in den Stützstellen

$$x_i = -1 + \frac{i}{n}, \quad i = 0, \dots, 2n.$$

Ziel der Aufgabe ist es, zu zeigen, dass $p_{2n}(x)$ für alle $x \in [-1, 1] \setminus \{-1, 0, 1\}$ divergiert.

Für die Bearbeitung der Aufgabe empfiehlt sich folgende Matrix-Notation des Dreiecksschemas für dividierte Differenzen:

$$A = (a_{ij})_{i,j=0,\dots,2n} \quad \text{mit} \quad a_{ij} = f[x_{i-j}, \dots, x_i]\,, \quad i \geq j\,.$$

Nach der Definition der dividierten Differenzen gilt die iterative Vorschrift

$$a_{ij} = \frac{a_{i,j-1} - a_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}\,, \quad i \geq j > 0\,,$$

und $a_{i0} = f(x_i)$ für $i = 0, \dots, 2n$.

(a) Zeigen Sie:

$$p_{2n}(x) = -x + \sum_{k=1}^{n} a_{n+k,n+k} \prod_{i=0}^{n+k-1} (x - x_i) \tag{1}$$

Hinweis: Berechnen Sie die 2. und 3. Spalte von A, also a_{i1} und a_{i2} für $i \leq 2n$, und anschließend die Diagonaleinträge a_{ii} für $i \leq n$.

Lösung: Es gilt $a_{i1} = -1$ für $i = 0, \dots, n$ und $a_{i1} = 1$ für $i = n+1, \dots, 2n$, also $a_{i2} = 0$ für $i \neq n+1$ und $a_{n+1,2} = 2n$. Demnach gilt $a_{ij} = 0$ für $i = 0, \dots, n$ und alle $j > 2$. Zudem gilt $a_{00} = f(x_0) = -1$ und $a_{11} = 1$, also folgt Darstellung (1).

(b) Bestimmen Sie die $(n+2)$-te Zeile von A, also $a_{n+1,j}$ für $j \leq n+1$.

Lösung: Die $(n+1)$-te Zeile ist nach (a) offenbar: $[0 \quad -1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$. Daher ist die $(n+2)$-te Zeile:

$$[1/n \quad 1 \quad 2n/2 \quad 2n^2/2! \quad \cdots \quad 2n^{n-1}/n!]\,,$$

also $a_{n+1,j} = 2n^{j-1}/j!$ für $0 < j \leq n+1$.

---

[1] S. Bernstein, Quelques remarques sur l'interpolation, Math. Ann. 79 (1918), no. 1-2, 1-12.

(b*) Bestimmen Sie den Eintrag $a_{2n,2n}$.

Lösung: Man setze

$$a_{n+k,j} = b_{n+k,j}\frac{n^{j-1}}{j!} \quad \text{für } 1 \le k,\ 1 \le j \le n+k.$$

Wegen $x_{n+k} - x_{n+k-j} = j/n$ gilt dann

$$\begin{aligned} a_{n+k,j} = \frac{a_{n+k,j-1} - a_{n+k-1,j-1}}{x_{n+k} - x_{n+k-j}} &= (b_{n+k,j-1} - b_{n+k-1,j-1})\frac{1}{j/n}\frac{n^{j-2}}{(j-1)!} \\ &= (b_{n+k,j-1} - b_{n+k-1,j-1})\frac{n^{j-1}}{j!} \quad \text{für } 2 \le k,\ 1 \le j \le n+k. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientvergleich ergibt sich also die Rekursion

$$b_{n+k,j} = b_{n+k,j-1} - b_{n+k-1,j-1} \quad \text{für } 2 \le k,\ 1 \le j \le n+k,$$

beziehungsweise, durch rekursive Aufschlüsselung von $b_{n+k,j-1}$,

$$b_{n+k,j} = b_{n+k,k} - \sum_{\ell=k}^{j-1} b_{n+k-1,\ell} \quad \text{für } 2 \le k,\ k+1 \le j \le n+k. \tag{2}$$

Nach (a) ist $a_{n+k,2} = 0$ für alle $k \ge 2$. Es folgt dann, dass für $k \ge 3$ die Einträge $b_{n+k,2}, \dots, b_{n+k,k}$ ebenfalls gleich Null sind. Somit ergibt sich die Rekursion

$$b_{n+k,j} = -\sum_{\ell=k}^{j-1} b_{n+k-1,\ell} \quad \text{für } 2 \le k,\ k+1 \le j \le n+k.$$

mit den Startwerten (siehe (b))

$$b_{n+1,j} = 2 \quad \text{für } 2 \le j \le n+1.$$

Für $k = n \ge 2$ erhält man daraus die folgende Formel:

$$\begin{aligned} b_{n+n,2n} &= -\sum_{\ell_1=n}^{2n-1} b_{n+(n-1),\ell_n} = \sum_{\ell_1=n}^{2n-1}\sum_{\ell_2=n-1}^{\ell_1-1} b_{n+(n-2),\ell_{n-1}} = \dots \\ &= (-1)^{n-1}\sum_{\ell_1=n}^{2n-1}\sum_{\ell_2=n-1}^{\ell_1-1}\cdots\sum_{\ell_{n-1}=2}^{\ell_{n-1}-1} b_{n+1,\ell_2} \\ &= (-1)^{n-1}2\sum_{\ell_1=n}^{2n-1}\sum_{\ell_2=n-1}^{\ell_1-1}\cdots\sum_{\ell_{n-1}=2}^{\ell_{n-1}-1} 1. \end{aligned}$$

Die Anzahl der Summanden in der geschachtelten Summe ist gleich der Anzahl aller Tupel $(\ell_1, \dots, \ell_{n-1}) \in \{2, \dots, 2n-1\}^{n-1}$ mit $\ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_{n-1}$. Diese Anzahl ist offenbar gleich der Anzahl von Möglichkeiten überhaupt $n-1$ veschiedene Zahlen aus $\{2,\dots,2n-1\}$ zu wählen, also gleich $\binom{2n-2}{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}$. Somit ist

$$b_{2n,2n} = (-1)^{n-1} 2 \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!},$$

beziehungsweise

$$a_{2n,2n} = (-1)^{n-1} 2 \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} \cdot \frac{n^{2n-1}}{(2n)!} = \frac{(-1)^{n-1} n^{2n}}{(2n-1)n!n!}.$$

(c) Seien $i, j < 2n$ fest und es gelte $x_{k-1} < x_k$ für alle $k > 0$. Zeigen Sie: Falls $a_{ik} > 0$ für alle $k \geq j$ und $a_{i+1,j} \leq 0$, dann folgt $a_{i+1,k} < 0$ für alle $k \geq j$. Analog gilt: Falls $a_{ik} < 0$ für alle $k \geq j$ und $a_{i+1,j} \geq 0$, dann folgt $a_{i+1,k} > 0$ für alle $k \geq j$.

Lösung: Das folgt induktiv aus der Definition der dividierten Differenzen bzw. der obigen iterativen Vorschrift für a_{ij}. Man sieht es auch an der Formel (2).

(d) Berechnen Sie das Vorzeichen von a_{ij} für alle $i > n$ und $j > 2$.

Lösung: Nach (a) und (b) liegen die Voraussetzungen von (c) für $i = n+1$ vor, also $a_{n+1,j} > 0$ für $j > 2$. Für $j > 2$ folgt dann ebenfalls mit (c) induktiv $a_{n+2,j} < 0$, $a_{n+3,j} > 0$, usw. Also generell $\operatorname{sgn}(a_{n+k,j}) = (-1)^{k+1}$ und $k \geq 1$.

(e) Zeigen Sie: Falls $x < 0$, haben alle Summanden unter dem Summenzeichen in der Darstellung (1) von $p_{2n}(x)$ dasselbe Vorzeichen.

Lösung: Nach (d) alterniert das Vorzeichen von $a_{n+k,n+k}$ mit k. Da $x < 0$, ist die Anzahl der Faktoren im Produkt $\prod_{i=0}^{n+j-1}(x - x_i)$, für welche $x - x_i \geq 0$ auch für alle k dieselbe. Somit alterniert das Vorzeichen dieses Produkts ebenfalls mit k.

(f) Folgern Sie, dass $\limsup_{n\to\infty} |p_{2n}(x)| = +\infty$ für jedes feste $x \in (-1, 0)$.

Hinweis: Nach (e) genügt es zu zeigen, dass $\left|a_{2n,2n} \prod_{i=0}^{2n-1}(x - x_i)\right|$ für eine Teilfolge unbeschränkt wächst. Nach (b*) ist $a_{2n,2n} = \frac{(-1)^{n-1} n^{2n}}{(2n-1)n!n!}$.

Lösung: Sei $x \in (-1, 0)$ fixiert. Dem Hinweis folgend zeigen wir, dass eine Teilfolge der Folge

$$S(n) = \left| a_{2n,2n} \prod_{i=0}^{2n-1} (x - x_i) \right| \overset{(b^*)}{=} \left| \frac{(-1)^{n-1} n^{2n}}{(2n-1)n!n!} \prod_{i=0}^{2n-1} (x - x_i) \right|$$

unbegrenzt anwächst.

Es sei $x \in [x_{\ell-1}, x_\ell]$, $1 \leq \ell \leq n$. Die Zahl $\ell = \ell(x, n)$ hängt offenbar von x ab. Genauer gesagt, gilt

$$\ell(x, n) = n - \lfloor |x| \cdot n \rfloor \leq n - |x| \cdot n + 1. \tag{3}$$

Sei weiterhin

$$\Delta = \Delta(x, n) = \min(x - x_{\ell-1}, x_\ell - x).$$

Betrachtet man die 2ℓ Stützstellen $x_0, \dots, x_{2\ell-1}$ links und rechts von x, so ergibt sich die Teilabschätzung

$$\prod_{i=0}^{2\ell-1} |x - x_i| \geq \Delta^2 \frac{1^2}{n^2} \cdot \frac{2^2}{n^2} \cdots \frac{(\ell-1)^2}{n^2}.$$

Die verbleibenden Abstände genügen der Abschätzung

$$\prod_{i=2\ell}^{2n-1} |x - x_i| \geq \frac{\ell}{n} \cdot \frac{\ell+1}{n} \cdots \frac{2n-\ell-1}{n}.$$

Wir setzen beide Abschätzungen in die Formel für $S(n)$ ein und kürzen soviele Terme wie möglich. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} S(n) &\geq \frac{\Delta^2 n^2}{2n-1} \cdot \frac{\ell(\ell+1)\cdots(2n-\ell-1)}{\ell^2(\ell+1)^2 \cdot (\ell+2)^2 \cdots (n-1)^2 n^2} \\ &= \frac{\Delta^2}{2n-1} \cdot \frac{n(n+1)\cdots(2n-\ell-1)}{\ell(\ell+1)\cdot(\ell+2)\cdots(n-1)} = \frac{\Delta^2}{2n-1} \cdot \prod_{k=0}^{n-\ell-1} \frac{n+k}{\ell+k}. \end{aligned}$$

Die Faktoren unter dem Produktzeichen sind wegen

$$\frac{n+k}{\ell+k} = 1 + \frac{n-\ell}{\ell+k}$$

monoton fallend in k. Wir schätzen daher das Produkt sehr grob nach unten ab, wenn wir alle k durch $n-\ell-1$ ersetzen. Dann ist

$$S(n) \geq \frac{\Delta^2}{2n-1} \left(\frac{2n-\ell-1}{n-1} \right)^{n-\ell}.$$

Wenn man die Ungleichung (3) für ℓ benutzt, gelangt man schließlich zu Abschätzung

$$S(n) \geq \frac{\Delta^2}{2n-1} \left(\frac{n-1+|x|\cdot n-1}{n-1} \right)^{|x|\cdot n-1} \geq \frac{\Delta^2}{2n-1} \left(1 + |x| - \frac{1}{n-1} \right)^{|x|\cdot n-1}.$$

Es gilt zum Beispiel $1 + |x| - \frac{1}{n-1} \geq 1 + \frac{|x|}{2} > 1$ für n groß genug.

Wir behaupten nun, dass für unendlich viele n die Abschätzung $\Delta(x,n) \geq 1/n^3$ gilt. Daraus folgt dann die Behauptung. In der Tat, für ein n gelte nicht $\Delta(n) \geq 1/n^3$, also etwa

$$-\frac{\ell}{n} - \frac{1}{n^3} < x < -\frac{\ell}{n} + \frac{1}{n^3}. \tag{4}$$

Da $x \neq -1, 0$, ist $\ell \neq 0, n$ für genügend große n. Offenbar ist dann aber (für genügend große n) entweder $-(\ell+1)/(n+1)$ oder $-\ell/(n+1)$ die nächstgelegene Stützstelle des nächstfeineren Gitters, denn wegen

$$-\frac{\ell}{n} - \left(-\frac{\ell+1}{n+1} \right) = \frac{n-\ell}{n(n+1)} \geq \frac{1}{(n+1)^2}$$

und

$$-\frac{\ell}{n+1} - \left(-\frac{\ell}{n}\right) = \frac{\ell}{n(n+1)} \geq \frac{1}{(n+1)^2}$$

folgt dann aus (4), dass $x \in [-(\ell+1)/(n+1), -\ell/(n+1)]$ für genügend große n. Dann ist aber nach obiger Abschätzung auch

$$\Delta(x, n+1) = \max\left(x - \left(-\frac{\ell+1}{n+1}\right), -\frac{\ell}{n+1} - x\right) \geq \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^3} \geq \frac{1}{(n+1)^3}$$

für genügend große n. Wir schließen daraus, dass die Ungleichung $\Delta(n) \geq 1/n^3$ für unendlich viele n gelten muss (genau genommen für jedes zweite n).

(g) Warum gilt dies auch für $x \in (0, 1)$?

Lösung: Aus der Lagrangeschen Darstellung ergibt sich aufgrund der Symmetrie der Stützstellen und der Funktion f relativ leicht, dass p_{2n} eine gerade Funktion ist, also $p_{2n}(-x) = p_{2n}(x)$ für alle x.